Exercice 1 ($\simeq 2,5$ points).

1. Calcul de $\ell = -2 \times \dfrac{\dfrac{2}{3} - \dfrac{5}{6}}{1 - \dfrac{5}{3}}$

$$\ell = -2 \times \frac{\dfrac{4}{6} - \dfrac{5}{6}}{\dfrac{3}{3} - \dfrac{5}{3}} = -2 \times \frac{-\dfrac{1}{6}}{-\dfrac{2}{3}} = -2 \times \frac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{2}{3}} = -2 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} = -\frac{2 \times 3}{6 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

2. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $5x + 7 - 2(3 - x) = 0$.

$$\begin{aligned} 5x + 7 - 2(3 - x) = 0 \text{ si et seulement si } & 5x + 7 - 6 + 2x = 0\,; \\ \text{ssi } & 7x + 1 = 0\,; \\ \text{ssi } & 7x = -1\,; \\ \text{ssi } & x = -\frac{1}{7}. \end{aligned}$$

Exercice 2 ($\simeq 9,5$ points). On considère f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2(3 - 2\ln x)$$

1. f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = 3 - 2\ln x$.
   Donc $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 0 - 2 \times \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$. D'où

$$f'(x) = 2x \times (3 - 2\ln x) + x^2 \times \left(-\frac{2}{x}\right) = 2x(3 - 2\ln x) - 2x$$

   En factorisant par $2x$, on obtient :

$$f'(x) = 2x \times [(3 - 2\ln x) - 1] = 2x \times (2 - 2\ln x) = 4x \times (1 - \ln x)\,.$$

2. a) Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (3 - 2\ln x) = +\infty$.
   Par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$.
   On ne peut pas conclure directement car on est face à la forme indéterminée « $0 \times \infty$ ». Pour contourner ce problème, on écrit différemment $f(x)$:

$$f(x) = x^2(3 - 2\ln x) = 3x^2 - 2x^2 \ln x.$$

   On a toujours $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$, et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} 3x^2 = 3 \times 0 = 0$.
   De plus, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0$ par croissances comparées à l'origine (précisément le formulaire nous assure que $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$ pour tout $\alpha > 0$).
   Finalement,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 2 \times 0 = 0.$$

   b) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$.
   De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$; par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} (3 - 2\ln x) = -\infty$.
   Conclusion. Par produit des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3. On a vu précédemment que $f'(x) = 4x\,(1 - \ln x)$. Comme cette expression est un produit, on va déterminer le signe de $f'(x)$ en dressant un tableau de signe ; pour cela, on a besoin de :

- 4 est toujours > 0.
- x est toujours > 0 sur l'ensemble de définition de f puisque $D_f =]0; +\infty[$.
- On a $1 - \ln x \geqslant 0$ ssi $1 \geqslant \ln x$,
  ssi $\mathrm{e}^1 \geqslant \mathrm{e}^{\ln x}$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$;
  ssi $\mathrm{e} \geqslant x$;
  ssi $x \leqslant \mathrm{e}$.

- Conclusion. Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	0		e		$+\infty$
$4x$	0	$+$		$+$	
$1 - \ln x$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|$ 0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$-\infty$

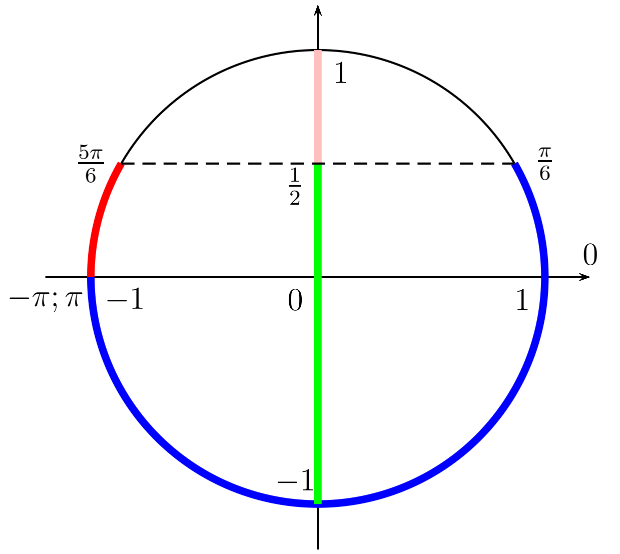
Remarque : $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2(3 - 2 \times \ln(\mathrm{e})) = \mathrm{e}^2(3 - 2 \times 1) = \mathrm{e}^2(3 - 2) = \mathrm{e}^2$.

4. a) Rappelons que $f'(x) = 4x\,(1 - \ln x)$.
f' est donc de la forme $4 \times U \times V$ avec $U(x) = x$ et $V(x) = 1 - \ln x$. Donc $U'(x) = 1$ et $V'(x) = -\frac{1}{x}$.
D'où
$$f''(x) = 4 \times \left[1 \times (1 - \ln x) + x \times \frac{-1}{x}\right] = 4 \times [1 - \ln x - 1] = -4 \ln x.$$
b) La fonction f est convexe sur un intervalle I si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
Pour tout $x \in]0; +\infty[$ l'inéquation $-4 \ln x \geqslant 0$ est équivalente à $\ln x \leqslant 0$.
Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, l'inéquation est équivalente à :
$\mathrm{e}^{\ln x} \leqslant \mathrm{e}^0$, c'est-à-dire $x \leqslant 1$.
Conclusion. On en déduit que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \leqslant 1$.
D'où f est convexe sur l'intervalle $]0; 1]$.

Exercice 3 ($\simeq 8$ points).

1. Résolution sur $[-\pi;\pi]$ de l'inéquation : $\quad \sin x < \frac{1}{2}$

   Remarquons d'abord que, pour tout $x \in [-\pi;\pi]$, on a : $\sin(x) = \frac{1}{2}$ ssi $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.



   Par lecture sur le cercle trigo, en parcourant le cercle de $t=-\pi$ vers progressivement $t=\pi$ (cela revient à faire un tour), on constate (voir aussi dessin ci-dessus) que :

   $\sin(x) < \frac{1}{2}$ (zone verte) ssi $-\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6}$ (zone bleue) ou $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \pi$ (zone rouge)

   Conclusion. L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{6}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{6};\pi\right]$.

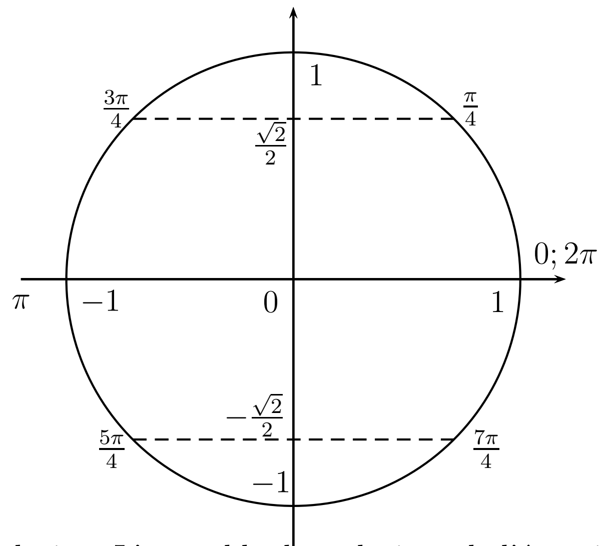
2. Résoudre sur $[0;2\pi]$ l'équation : $\quad 2\sin^2 x - 1 = 0$.

   ★ **Première méthode.** On a $\quad 2\sin^2 x - 1 = 0$ ssi $\quad \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$;

   ssi $\quad \sin x = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$ ou $\sin x = -\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

   Or $\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   Donc $\quad 2\sin^2 x - 1 = 0$ ssi $\quad \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



   Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{3\pi}{4}\ ;\ \dfrac{5\pi}{4}\ ;\ \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

★ **Seconde méthode.**

On sait que $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ pour tout réel x.

Par conséquent, $2\sin^2 x - 1 = 0$ ssi $-\cos(2x) = 0$, ssi $\cos(2x) = 0$.

Ici $x \in [0; 2\pi]$; donc $t = 2x \in [0; 4\pi]$.

Or, pour tout $t \in [0; 4\pi]$ (cela correspond à faire deux tours de cercle), on a

$$\cos(t) = 0 \text{ ssi } t = \tfrac{\pi}{2} \text{ ou } t = \tfrac{3\pi}{2} \text{ ou } t = \tfrac{\pi}{2} + 2\pi = \tfrac{5\pi}{2} \text{ ou } t = \tfrac{3\pi}{2} + 2\pi = \tfrac{7\pi}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0; 2\pi]$ on a

$$\begin{aligned}\cos(2x) = 0 &\text{ ssi } 2x = \tfrac{\pi}{2} \text{ ou } 2x = \tfrac{3\pi}{2} \text{ ou } 2x = \tfrac{5\pi}{2} \text{ ou } 2x = \tfrac{7\pi}{2}\,;\\ &\text{ ssi } x = \tfrac{\pi}{4} \text{ ou } x = \tfrac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \tfrac{5\pi}{4} \text{ ou } x = \tfrac{7\pi}{4}.\end{aligned}$$

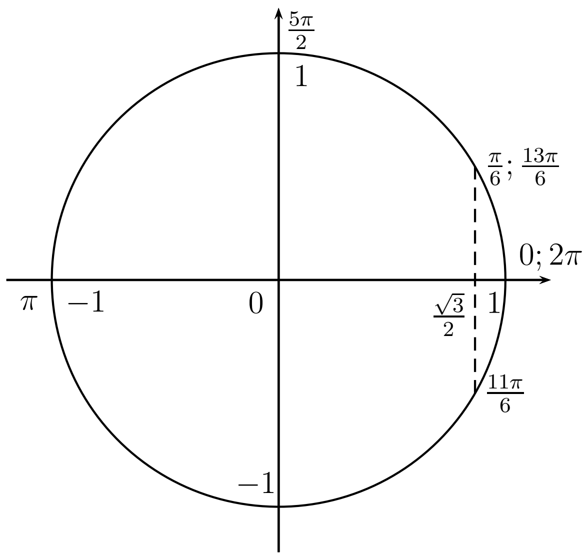
Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{3\pi}{4}\,;\,\dfrac{5\pi}{4}\,;\,\dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

3. Résolution sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ de l'équation : $\cos(5x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Comme $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a $t = 5x \in [0; \frac{5\pi}{2}]$.

Considérons alors un réel t tel que $t \in [0; \frac{5\pi}{2}]$ et cherchons à résoudre $\cos(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Travaillons pour cela avec un cercle trigo.



Par lecture sur le cercle trigo, en parcourant le cercle de $t = 0$ vers progressivement $t = \frac{5\pi}{2}$ (cela revient à faire un tour et quart), on constate (voir aussi dessin ci-dessus) que :

$\cos(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ssi $t = \frac{\pi}{6}$ (début du premier tour)

ou $t = \frac{11\pi}{6}$ (fin du premier tour)

ou $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$ (début du 2ème tour pour faire le quart de tour restant, pour aller de 2π à $\frac{5\pi}{2}$).

Si on revient à x (en pensant $t = 5x$), on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(5x) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} &\text{ ssi } 5x = \tfrac{\pi}{6} \text{ ou } 5x = \tfrac{11\pi}{6} \text{ ou } 5x = \tfrac{13\pi}{6}\\ &\text{ ssi } x = \tfrac{\pi}{30} \text{ ou } x = \tfrac{11\pi}{30} \text{ ou } x = \tfrac{13\pi}{30}.\end{aligned}$$

Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\left\{\frac{\pi}{30}\,;\,\frac{11\pi}{30}\,;\,\frac{13\pi}{30}\right\}.$$

Fin du corrigé