FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

Ne pas ajouter de formule à ce formulaire car seul document autorisé en devoir

L'essentiel sur les fonctions logarithme, exponentielle et puissances

Fonctions

logarithme :
$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (x > 0)$
$\ln 1 = 0$
$\ln \mathrm{e} = 1$
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$
$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

exponentielle :
Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0; +\infty[$,
$y = \mathrm{e}^x$ équivaut à $x = \ln y$
$\mathrm{e}^0 = 1$
$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$
$\mathrm{e}^{a-b} = \frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$
$(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab}$

puissances :
$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x} \quad (x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$
$x^0 = 1$
$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta$
$x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta}$
$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0; \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

Si $\alpha > 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$

Si $\alpha < 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha\, \mathrm{e}^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

Comportant à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$

Si $\alpha < 0, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$

Croissances comparées à l'origine

Si $\alpha > 0, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$

Comportant à l'origine de $\ln(1+x), \mathrm{e}^x, \sin x, (1+x)^\alpha$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$(1+h)^\alpha = 1 + \alpha h + h\epsilon(h) \quad$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$ et $\alpha \neq 0$

Dérivées des fonctions usuelles

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I :

$f(x)$	La dérivée de f sur I
$(u(x))^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \times u'(x) \times (u(x))^{\alpha-1}$
$\dfrac{1}{u(x)}$	$\dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$\cos(u(x))$	$-u'(x) \times \sin(u(x))$
$\sin(u(x))$	$u'(x) \times \cos(u(x))$
$\tan(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = u'(x) \times (1 + \tan^2(u(x)))$
$\ln\lvert u(x)\rvert$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$\mathrm{e}^{u(x)}$	$u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$
$\arccos(u(x))$	$\dfrac{-u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$\arcsin(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$\arctan(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

Relations fondamentales

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	imp.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Formules de l'arc double

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
$\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

Formules d'addition

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formules de transformation de produit en somme

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

Formules de transformation de somme en produit

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

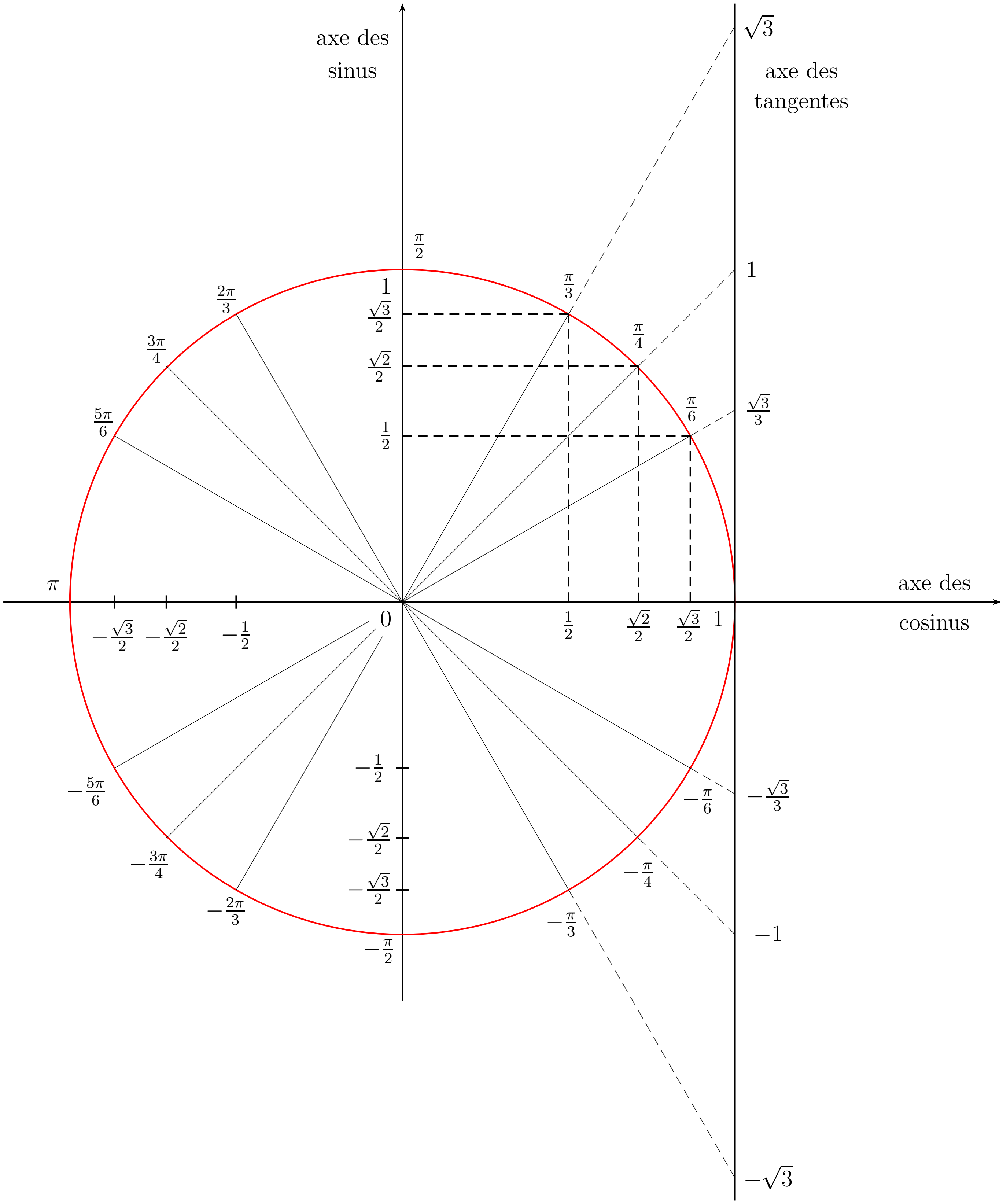
$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

Expression de $\cos$, $\sin$ et $\tan$ en fonction de la tangente de l'angle moitié

Si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Cercle trigonométrique



Primitives des fonctions usuelles

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I :

$f(x)$	Une primitive de f sur I
$u'(x) \times (u(x))^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{(u(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\dfrac{1}{u(x)}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$u'(x) \times \cos(u(x))$	$\sin(u(x))$
$u'(x) \times \sin(u(x))$	$-\cos(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = u'(x) \times (1+\tan^2(u(x)))$	$\tan(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$
$u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}$	$\mathrm{e}^{u(x)}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\arcsin(u(x))$
$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\arctan(u(x))$