I.U.T. de Brest — Année 2020-21
G.M.P. 2. — Corrigé du devoir du 05/03/2021
Courbes paramétrées (M4301)

Exercice 1 ($\simeq 11,5$ points). On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) &= 2t^3 + 3t^2 \\ y(t) &= 3t^2 + 6t \end{cases}$$

1. a) Calcul des dérivées sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) &= 6t^2 + 6t &= 6t(t+1) \\ y'(t) &= 6t + 6 &= 6(t+1) \end{cases}$$

b) On sait que la limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Donc :
$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (2t^3) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (3t^2) = +\infty$.

c) Même raisonnement qu'à la question précédente. On a :
$\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} (2t^3) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} (3t^2) = +\infty$.

d) $x'(t) = 6t^2 + 6t$ est un trinôme du second degré dont les racines sont clairement 0 et -1.
Donc $x'(t)$ est du signe de $a = 6$ à l'extérieur des racines.
Autrement dit $x'(t) > 0$ si et seulement si $t < -1$ ou $t > 0$.

Attention ! On ne se contente pas de résoudre $x'(t) = 0$ mais on doit résoudre $x'(t) > 0$ pour justifier pourquoi on met un $+$ ou un $-$ dans le tableau de variations. Idem pour $y'(t)$ ci-dessous...

De plus, $y'(t) > 0$ si et seulement si $t + 1 > 0$, ssi $t > -1$.

D'où le tableau de variations :

t	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	6	$+$	

2. a) Le point $M(0)$ a pour coordonnées $(0;0)$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(0) = x'(0)\vec{\imath} + y'(0)\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} = 6\vec{\jmath} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(0)$ est dirigée par ce vecteur, ce qui veut dire que la tangente est verticale.

Attention ! Il est essentiel de préciser d'abord que ce vecteur est $\neq \vec{0}$ pour être sûr qu'il dirige la tangente.

b) • Le point $M(1)$ a pour coordonnées $(5;9)$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(1) = x'(1)\vec{\imath} + y'(1)\vec{\jmath} = 12\vec{\imath} + 12\vec{\jmath} = 12(\vec{\imath} + \vec{\jmath}) \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(1)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ (car ce sont des vecteurs colinéaires).

Attention. Il ne faut surtout pas écrire que $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(1)$ est égal à $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$. En effet, les vecteurs $12(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ et $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ ne sont pas égaux, mais ils sont colinéaires ; ils ont donc la même direction.

- Le point $M(-1)$ a pour coordonnées $(1;-3)$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(-1) = x'(-1)\vec{\imath} + y'(-1)\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = \vec{0}.$$

Comme $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(-1) = \vec{0}$, on va utiliser un autre moyen pour déterminer un vecteur directeur de la tangente en $M(-1)$. On sait que la tangente a pour coefficient directeur le nombre $\lim\limits_{t \to -1} \frac{y'(t)}{x'(t)}$. Or pour $t \neq -1$, on a

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{6(t+1)}{6t(t+1)} = \frac{1}{t}.$$

Donc $\lim\limits_{t \to -1} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim\limits_{t \to -1} \frac{1}{t} = \frac{1}{-1} = -1.$

Le coefficient directeur de la tangente au point $M(-1)$ est donc égal à -1. Autrement dit la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

Remarque. De façon générale, si le coefficient directeur d'une droite est égal à a, alors le vecteur $\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de cette droite.

3. D'après le tableau de variations, nous avons deux branches infinies à étudier :
   - lorsque t tend vers $+\infty$: compte tenu des limites trouvées à la question 1.b, nous devons calculer

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{3t^2 + 6t}{2t^3 + 3t^2}.$$

Or on sait que la limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{3t^2}{2t^3} = \lim_{t \to +\infty} \frac{3}{2t} = 0.$$

Par conséquent, la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) lorsque t tend vers $+\infty$.

   - lorsque t tend vers $-\infty$: compte tenu des limites trouvées à la question 1.c, nous devons calculer

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{3t^2 + 6t}{2t^3 + 3t^2}.$$

Or on sait que la limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc :

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -\infty} \frac{3t^2}{2t^3} = \lim_{t \to -\infty} \frac{3}{2t} = 0.$$

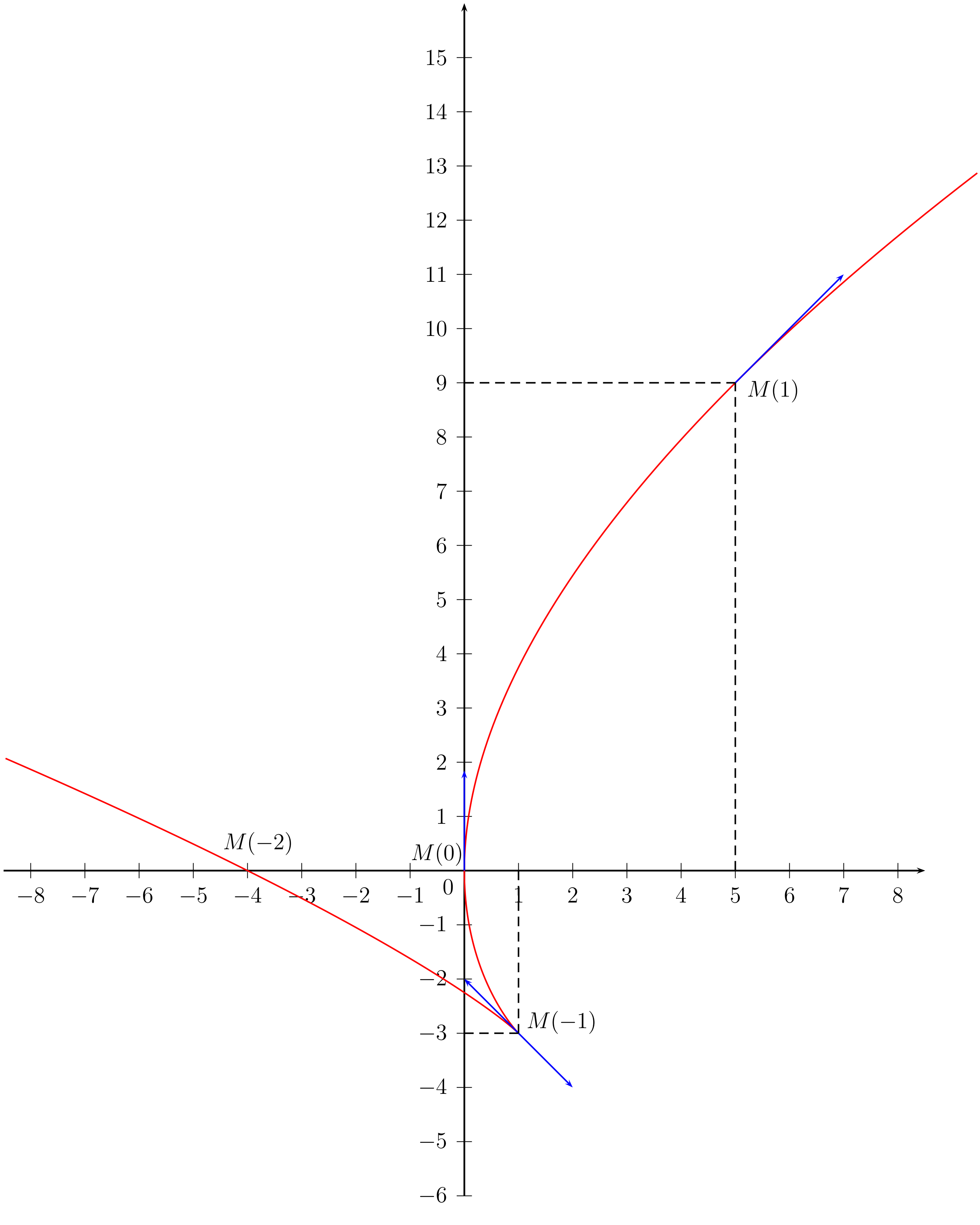
Par conséquent, la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) lorsque t tend vers $-\infty$.

4. Points d'intersection de la courbe avec l'axe (Ox) : il s'agit des points $M(t)$ vérifiant $y(t) = 0$, c'est-à-dire $3t^2 + 6t = 0$. Cela est vérifié ssi $3t(t + 2) = 0$, ssi $t = 0$ ou $t = -2$.

   Remarque. Au pire, on peut calculer le discriminant Δ pour résoudre $3t^2 + 6t = 0$...

   Alors la courbe coupe l'axe des abscisses aux points $M(0)$ et $M(-2)$.
   $M(0)$ a pour coordonnées cartésiennes $(0; 0)$ car $x(0) = 0$.
   Et $M(-2)$ a pour coordonnées cartésiennes $(-4; 0)$ car $x(-2) = 2 \times (-8) + 3 \times 4 = -16 + 12 = -4$.

5. Tracé de la courbe : on commence par placer les points vus aux questions précédentes, ainsi que les vecteurs donnant la direction de leur tangente, puis on respecte le tableau de variations et les branches infinies.



M(1)
M(0)
M(−2)
M(−1)
0

Exercice 2 ($\simeq 8,5$ points). On considère la courbe définie en polaires, pour tout réel θ, par

$$r(\theta) = 1 - 2\cos(\theta)$$

1. a) $r(\theta + 2\pi) = 1 - 2\cos(\theta + 2\pi) = 1 - 2\cos(\theta)$ car cosinus est une fonction 2π-périodique. Donc $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$, et le point $M(\theta + 2\pi)$ coincide avec le point $M(\theta)$ $\rightarrow$ pour le justifier, faire obligatoirement un dessin comme en cours et/ou comme dans les vidéos.

   b) $r(-\theta) = 1 - 2\cos(-\theta) = 1 - 2\cos(\theta)$ car cosinus est une fonction paire. Donc $r(-\theta) = r(\theta)$, et le point $M(-\theta)$ est le symétrique du point $M(\theta)$ par rapport à l'axe des abscisses $\rightarrow$ pour le justifier, faire obligatoirement un dessin comme en cours et/ou comme dans les vidéos.

   c) D'après a) on peut étudier la courbe sur un intervalle de longueur 2π ; on choisit $[-\pi; \pi]$. Maintenant si $\theta \in [0; \pi]$, on a $-\theta \in [-\pi; 0]$. Donc d'après b) on peut réduire l'étude à $[0; \pi]$ car on a un moyen (en fait une symétrie, mais cela n'a pas d'importance pour la réduction d'intervalle d'étude) pour basculer de $M(-\theta)$ à $M(\theta)$.

   Remarque. Une fois qu'on aura tracé les points $M(\theta)$ avec $\theta \in [0; \pi]$, on obtiendra le reste de la courbe par une symétrie par rapport à l'axe Ox.

2. $r'(\theta) = 0 - 2 \times (-\sin\theta) = 2\sin\theta$.
   Or on sait que $\sin\theta \geqslant 0$ pour tout $\theta \in [0; \pi]$ $\rightarrow$ pour le justifier, dessiner obligatoirement un cercle trigo sur sa copie et mettre de la couleur pour montrer où est $[0; \pi]$ et où on lit le sinus correspondant.
   D'où le tableau de variations :

θ	0		π
$r'(\theta)$	0	$+$	0
r	-1	$\nearrow$	3

   Ici $r(0) = 1 - 2\cos(0) = 1 - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1$ et $r(\pi) = 1 - 2\cos(\pi) = 1 - 2 \times (-1) = 1 + 2 = 3$.

3. $r(\theta) = 0$ si et seulement si $1 - 2\cos(\theta) = 0$, ssi $\cos(\theta) = \dfrac{1}{2}$.
   On représente cela sur un cercle trigo dessiné sur sa copie : on place $\frac{1}{2}$ sur l'axe des abscisses et on remonte sur le cercle en tenant compte du fait qu'on travaille uniquement sur $[0; \pi]$.
   On constate alors que $r(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
   Cela signifie que le point $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ se trouve à l'origine du repère.

4. a) On rappelle que

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = r'(\theta)\ \overrightarrow{u_\theta} + r(\theta)\ \overrightarrow{v_\theta},$$

   et que si ce vecteur est non nul (c'est-à-dire s'il est différent du vecteur nul $\vec{0}$), il dirige la tangente à la courbe au point $M(\theta)$.

   Coordonnées polaires du point $M(0)$: $(r, \theta) = (-1, 0)$.

   Tangente au point $M(0)$: comme $r'(0) = 0$ et $r(0) = -1$, on a $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(0) = -\ \overrightarrow{v_0} = -\vec{\jmath} \neq \vec{0}$.

La tangente est donc dirigée par $-\vec{\jmath}$, ce qui veut dire que la tangente est verticale.

b) • Coordonnées polaires du point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$: $(r, \theta) = \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

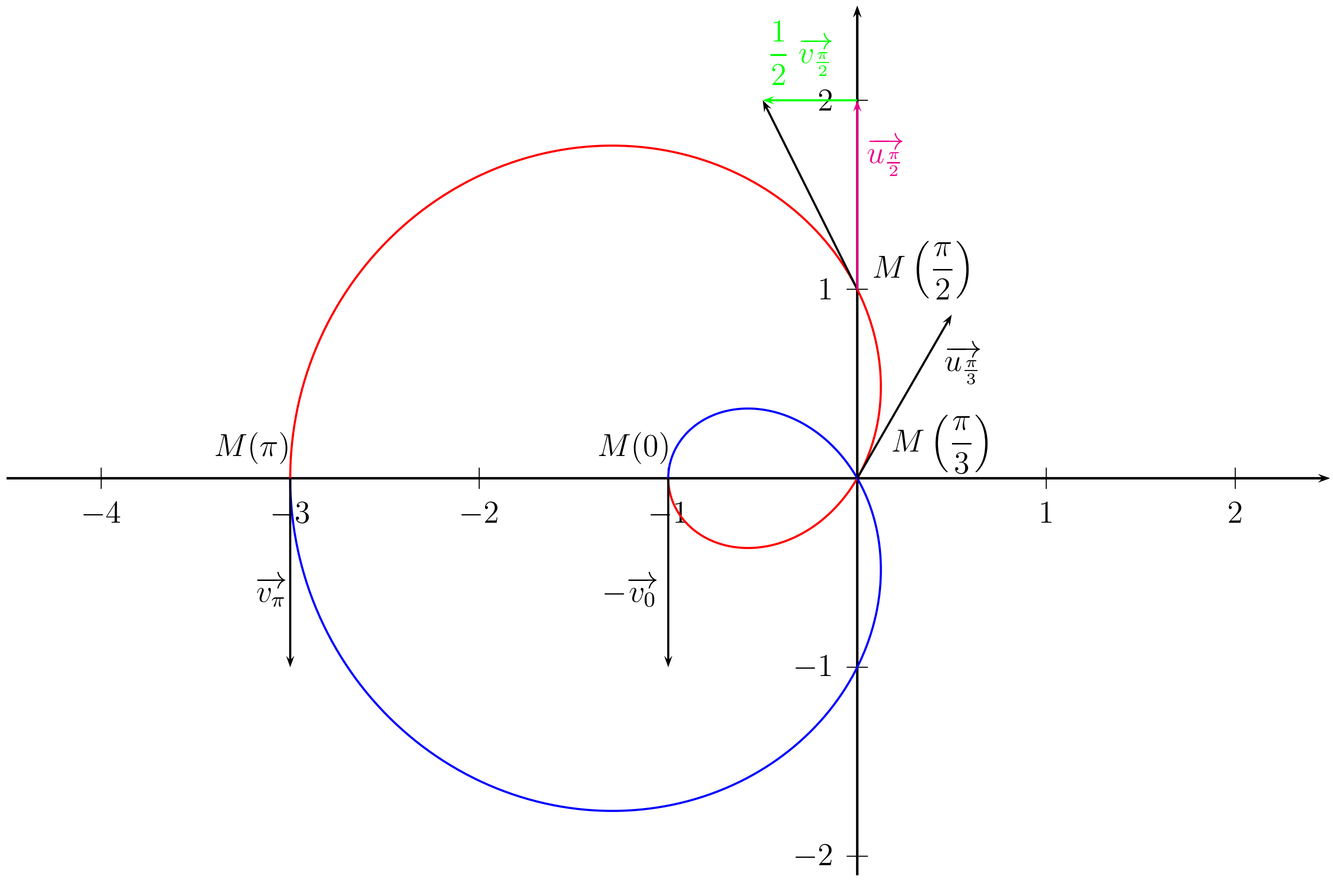
Tangente au point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$: comme $r'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ et $r\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$, on a $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\,\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{3}}} \neq \vec{0}$.
La tangente est donc dirigée par $\sqrt{3}\,\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{3}}}$; elle est donc également dirigée par $\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{3}}}$.

• Coordonnées polaires du point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$: $(r, \theta) = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Tangente au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$: comme $r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ et $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, on a $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} + \overrightarrow{v_{\frac{\pi}{2}}} \neq \vec{0}$.
La tangente est ici dirigée par $2\,\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} + \overrightarrow{v_{\frac{\pi}{2}}}$ ou, ce qui revient au même (et qui est plus simple à placer sur le tracé pour la dernière question) par $\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{2}}}$.

• Coordonnées polaires du point $M(\pi)$: $(r, \theta) = (3, \pi)$.
Tangente au point $M(\pi)$: comme $r'(\pi) = 0$ et $r(\pi) = 3$, elle est dirigée par $3\,\overrightarrow{v_\pi}$; elle est donc aussi dirigée par $\overrightarrow{v_\pi} = -\vec{\jmath}$ ce qui veut dire que la tangente est verticale.

5. Tracé de la courbe : on commence par placer les quatre points vus à la question 4 en utilisant leurs coordonnées polaires ; on trace ensuite les vecteurs donnant les directions des tangentes en ces points ; enfin, on trace la courbe rouge ci-dessous en respectant également le tableau de variations.



La partie rouge correspond aux points $M(\theta)$ avec θ décrivant $[0; \pi]$.
La partie bleue a été obtenue par symétrie de la partie rouge par rapport à l'axe (Ox).

Fin du corrigé.