**Exercice 1 ($\simeq 12$ points).** On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 - 2t \\ y(t) &= t^4 - 2t^2 \end{cases}$$

1. a) Calcul des dérivées sur $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x'(t) &= 2t - 2 &= 2(t-1) \\ y'(t) &= 4t^3 - 4t &= 4t(t^2-1) \end{cases}$$

*Remarque.* On peut factoriser davantage $y'(t)$ en utilisant une identité remarquable :

$$y'(t) = 4t(t^2-1) = 4t(t^2-1^2) = 4t(t-1)(t+1),$$

ce qui va être particulièrement utile à la question 2.b.

b) On sait que la limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Donc :
$\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (t^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} (t^4) = +\infty$.

Attention ! On ne se contente pas de balancer un résultat de limite en faisant comme si c'était évident : il faut absolument détailler son raisonnement.

Pour ces calculs de limites, on aurait aussi pu factoriser $x(t) = t^2 - 2t = t(t-2)$ et $y(t) = t^4 - 2t^2 = t^2(t^2-2)$, puis faire des calculs directs de produits de limites.

c) Même raisonnement qu'à la question précédente. On a :
$\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} (t^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} (t^4) = +\infty$.

d) • Signe de $x'(t) = 2(t-1)$ : $x'(t) > 0$ si et seulement si $t - 1 > 0$, ssi $t > 1$.

• Signe de $y'(t) = 4t(t^2-1)$ :
D'une part, $4t > 0$ ssi $t > 0$.
D'autre part, $t^2 - 1$ est un trinôme du second degré dont les racines sont 1 et $-1$. Donc $t^2 - 1$ est du signe de $a = 1$, donc positif, à l'extérieur des racines.
Il ne reste plus qu'à faire un tableau de signes pour trouver le signe de $y'(t)$ :

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4t$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $t^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Attention ! On ne se contente pas de résoudre $y'(t) = 0$ pour justifier le signe de $y'(t)$. Idem pour $x'(t)$ juste avant. Beaucoup trop d'étudiants perdent des points sur cette (non-)justification parce qu'ils n'ont toujours pas compris que le raisonnement était tout aussi important que le résultat et parce qu'ils croient naivement que balancer le résultat va rapporter des points...

- On en déduit le tableau de variations :

| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x'(t)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $3$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Détails des calculs :

$$x(-1) = 1 + 2 = 3; \qquad x(0) = 0 - 0 = 0; \qquad x(1) = 1 - 2 = -1;$$
$$y(-1) = 1 - 2 = -1; \qquad y(0) = 0 - 0 = 0; \qquad y(1) = 1 - 2 = -1.$$

2. a) Le point $M(0)$ a pour coordonnées $(0; 0)$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(0) = x'(0)\vec{\imath} + y'(0)\vec{\jmath} = -2\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = -2\vec{\imath} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(0)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $-\vec{\imath}$ (car ce sont des vecteurs colinéaires), ce qui veut dire que la tangente est horizontale.

Attention ! Il est essentiel de préciser d'abord que ce vecteur est $\neq \vec{0}$ pour être sûr qu'il dirige la tangente.

b) • Le point $M(-1)$ a pour coordonnées $(3; -1)$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(-1) = x'(-1)\vec{\imath} + y'(-1)\vec{\jmath} = -4\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = -4\vec{\imath} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(-1)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $-\vec{\imath}$ (car ce sont des vecteurs colinéaires), ce qui veut dire que la tangente est horizontale.

Attention. Il ne faut surtout pas écrire que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(-1)$ est égal à $-\vec{\imath}$. En effet, les vecteurs $-4\vec{\imath}$ et $-\vec{\imath}$ ne sont pas égaux, mais ils sont colinéaires ; ils ont donc la même direction.

- Le point $M(1)$ a pour coordonnées $(-1; -1)$. On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(1) = x'(1)\vec{\imath} + y'(1)\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = \vec{0}.$$

Comme $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(1) = \vec{0}$, on va utiliser un autre moyen pour déterminer un vecteur directeur de la tangente en $M(1)$. On sait que la tangente a pour coefficient directeur le nombre $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. Or pour $t \neq 1$, on a

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4t(t-1)(t+1)}{2(t-1)} = 2t(t+1).$$

Donc $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \lim\limits_{t\to 1} 2t(t+1) = 2\times 1\times 2 = 4$.

Le coefficient directeur de la tangente au point $M(1)$ est donc égal à 4. Autrement dit la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

*Remarque.* De façon générale, si le coefficient directeur d'une droite est égal à $a$, alors le vecteur $\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$ est un vecteur directeur de cette droite.

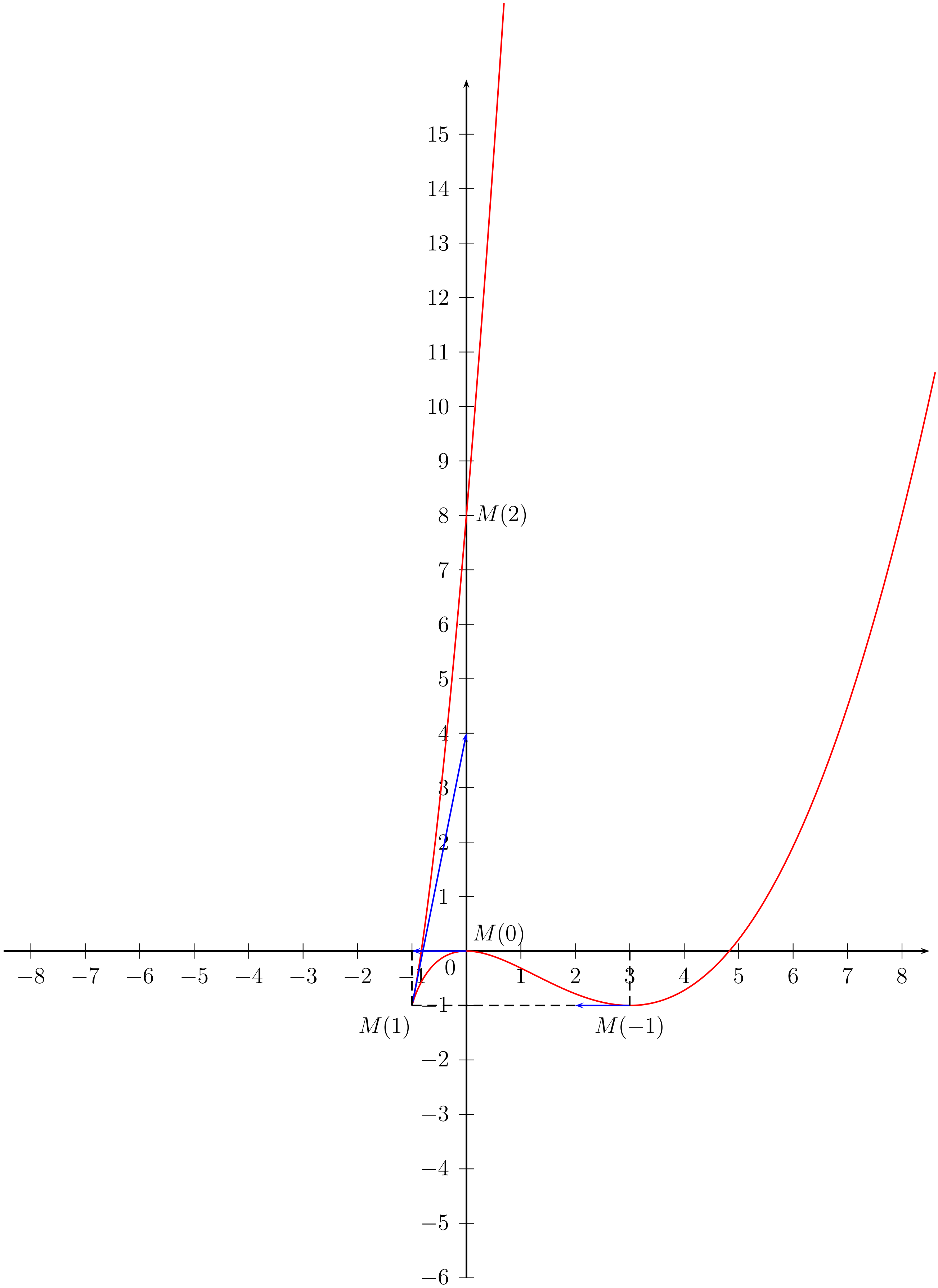
3. D'après le tableau de variations, nous avons deux branches infinies à étudier :
   - lorsque $t$ tend vers $+\infty$ : compte tenu des limites trouvées à la question 1.b, nous devons calculer
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^4-2t^2}{t^2-2t}.$$
Or on sait que la limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc :
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^4}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} t^2 = +\infty.$$
Par conséquent, la courbe admet une branche parabolique de direction $(Oy)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$.
   - lorsque $t$ tend vers $-\infty$ : compte tenu des limites trouvées à la question 1.c, nous devons calculer
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^4-2t^2}{t^2-2t}.$$
Or on sait que la limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc :
$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^4}{t^2} = \lim_{t\to-\infty} t^2 = +\infty.$$
Par conséquent, la courbe admet une branche parabolique de direction $(Oy)$ lorsque $t$ tend vers $-\infty$.

4. Points d'intersection de la courbe avec l'axe $(Oy)$ : il s'agit des points $M(t)$ vérifiant $x(t) = 0$, c'est-à-dire $t^2 - 2t = 0$. Cela est vérifié ssi $t(t-2) = 0$, ssi $t = 0$ ou $t - 2 = 0$, ssi $t = 0$ ou $t = 2$.

   *Remarque.* Au pire, on peut calculer le discriminant $\Delta$ pour résoudre $t^2 - 2t = 0$...

   Alors la courbe coupe l'axe des ordonnées aux points $M(0)$ et $M(2)$.
   On a déjà vu que $M(0)$ a pour coordonnées cartésiennes $(0;0)$.
   Et $M(2)$ a pour coordonnées cartésiennes $(0;8)$ car $y(2) = 16 - 2\times 4 = 16 - 8 = 8$.

5. Tracé de la courbe : on commence par placer les points vus aux questions précédentes, ainsi que les vecteurs donnant la direction de leur tangente, puis on respecte le tableau de variations et les branches infinies.



$M(2)$
$M(0)$
$M(1)$
$M(-1)$

**Exercice 2 ($\simeq 8$ points).** On considère la courbe définie en polaires, pour tout réel $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, par

$$r(\theta) = 1 - \cos(2\theta) - 2\sin(\theta)$$

1. a) En utilisant les formules de dérivation $(\cos u)' = -u'\sin u$ et $(\sin u)' = u'\cos u$, on obtient sans difficulté :

$$r'(\theta) = 0 - (-2\sin(2\theta)) - 2 \times \cos\theta = 2\sin(2\theta) - 2\cos\theta.$$

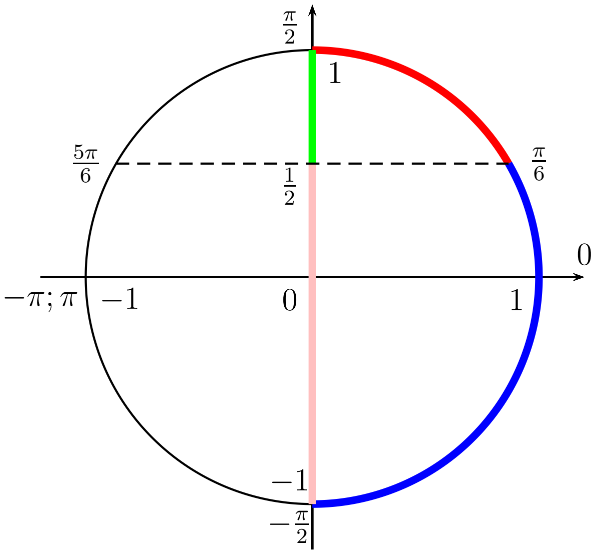
   b) En utilisant la formule $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$, on obtient alors :

$$r'(\theta) = 2 \times 2\sin\theta\cos\theta - 2\cos\theta = 2\cos\theta(2\sin\theta - 1).$$

2. Tout d'abord, on sait que $\cos\theta \geqslant 0$ pour tout $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ $\rightarrow$ pour le justifier, dessiner obligatoirement un cercle trigo sur sa copie et mettre de la couleur pour montrer où est $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et où on lit le cosinus correspondant.

   Par conséquent le signe de $r'(\theta)$ est donné par le signe de $2\sin\theta - 1$.

   Maintenant $2\sin\theta - 1 > 0$ ssi $2\sin\theta > 1$, ssi $\sin\theta > \frac{1}{2}$. Pour visualiser la situation, dessinons un cercle trigo :




   L'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ correspond à la partie droite du cercle trigo, dessinée ici en bleu et en rouge.

   Par lecture sur le cercle trigo, on constate que sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ :

$$\sin\theta > \frac{1}{2} \text{ (zone verte) ssi } \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ (zone rouge).}$$

   D'où le tableau de variations :

| $\theta$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $\frac{\pi}{6}$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $r'(\theta)$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 |
| $r$ | 4 | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | 0 |

   Attention ! Ici encore (comme à l'exercice 1) il ne suffit pas de résoudre $r'(\theta) = 0$ pour prétendre avoir justifié le signe de $r'(\theta)$ et le tableau de variations.

Détails des calculs :
$r\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1-\cos(-\pi) - 2\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1+1-2\times(-1) = 2+2 = 4;$
$r\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1-\dfrac{1}{2}-2\times\dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2};$
$r\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1-\cos(\pi) - 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1+1-2\times 1 = 2-2 = 0.$

3. a) On rappelle que
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = r'(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta} + r(\theta)\,\overrightarrow{v_\theta},$$
et que si ce vecteur est non nul (c'est-à-dire s'il est différent du vecteur nul $\vec{0}$), il dirige la tangente à la courbe au point $M(\theta)$.

Coordonnées polaires du point $M(0)$ : $(r,\theta) = (0,0)$.

Tangente au point $M(0)$ : comme $r'(0) = -2$ et $r(0) = 0$, on a $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(0) = -2\,\overrightarrow{u_0} \neq \vec{0}$.
La tangente est donc dirigée par le vecteur horizontal $-\overrightarrow{u_0}$, ce qui veut dire que la tangente est horizontale dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

b) • Coordonnées polaires du point $M\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ : $(r,\theta) = \left(4,-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Tangente au point $M\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ : comme $r'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $r\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 4$, on a $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 4\overrightarrow{v_{-\frac{\pi}{2}}} \neq \vec{0}$.
La tangente est ici dirigée par $4\,\overrightarrow{v_{-\frac{\pi}{2}}}$ ou, ce qui revient au même (et qui est plus simple à placer sur le tracé pour la dernière question) par $\overrightarrow{v_{-\frac{\pi}{2}}}$.

Attention ! Certains étudiants sont tentés de dire que la tangente est donc verticale car dirigée par $\overrightarrow{v_{-\frac{\pi}{2}}}$. Mais pas du tout : la tangente n'est pas verticale dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Si on y réfléchit deux secondes, on constate que le vecteur $\overrightarrow{v_{-\frac{\pi}{2}}}$ est égal au vecteur $\vec{\imath}$; la tangente est donc ici horizontale dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

En fait, il serait correct de dire qu'ici la tangente est verticale dans le repère mobile $(O,\overrightarrow{u_{-\frac{\pi}{2}}},\overrightarrow{v_{-\frac{\pi}{2}}})$.

• Coordonnées polaires du point $M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ : $(r,\theta) = \left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Tangente au point $M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ : comme $r'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$ et $r\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{6}}} \neq \vec{0}$.
La tangente est donc dirigée par $-\dfrac{1}{2}\,\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{6}}}$ ; elle est donc également dirigée par $-\overrightarrow{v_{\frac{\pi}{6}}}$.

Attention ! Ici la tangente n'est ni horizontale, ni verticale dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

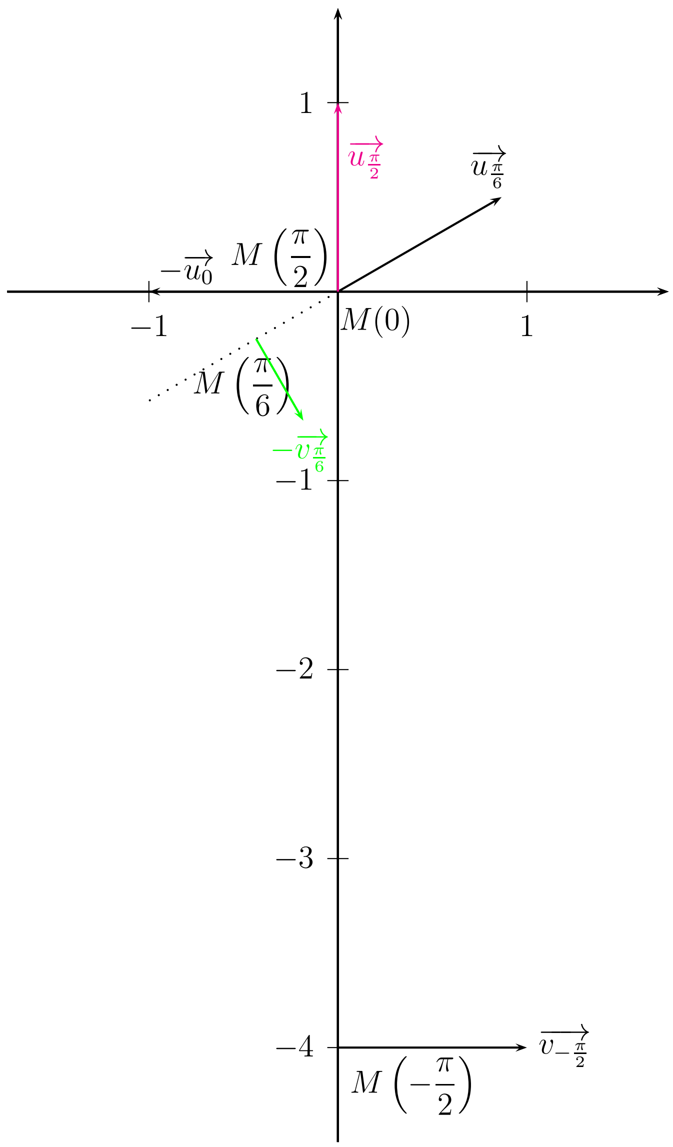
• Coordonnées polaires du point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ : $(r,\theta) = \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Tangente au point $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ : comme $r'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $r\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, on a $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \vec{0}$.
Dans ce cas, on sait d'après le cours que la tangente est obligatoirement dirigée par $\overrightarrow{u_{\frac{\pi}{2}}}$. Par conséquent, la tangente est verticale dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

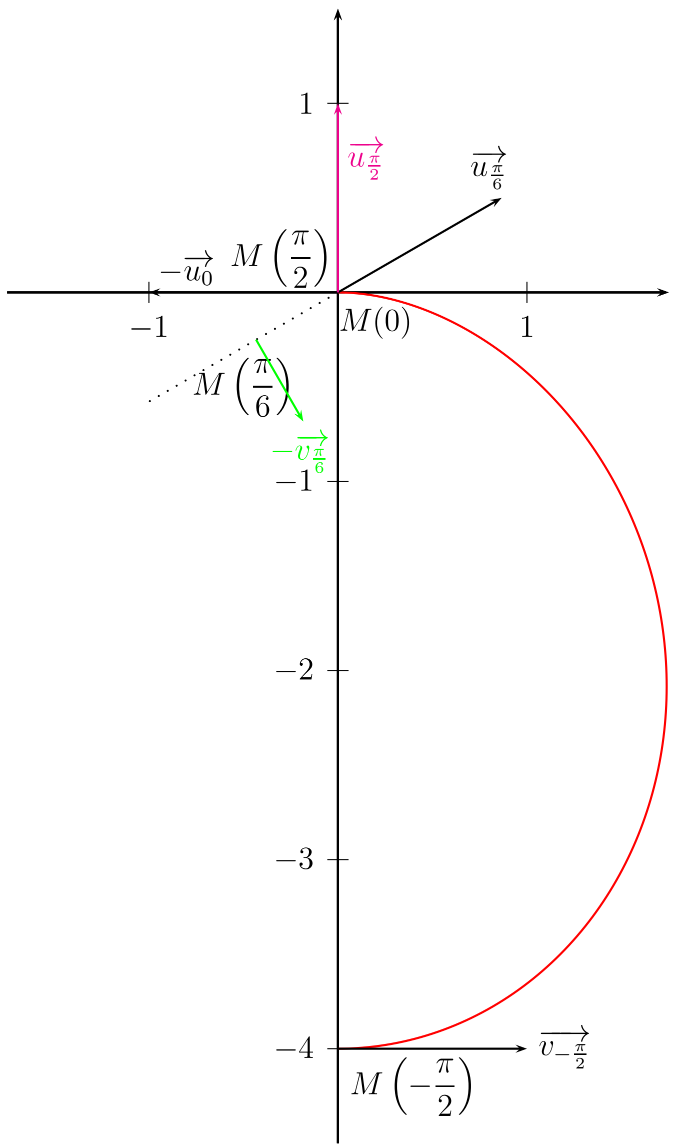
4. Tracé de la courbe. Même s'il fallait évidemment ne faire qu'un seul dessin sur la copie, nous procédons ici en cinq étapes pour bien détailler la correction.

Étape 1. On commence par placer les quatre points vus à la question 3 en utilisant leurs coordonnées polaires, puis on trace les vecteurs donnant les directions des tangentes en ces points.

Les points $M(0)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sont placés à l'origine du repère puisque $r(0)=0$ et $r\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.



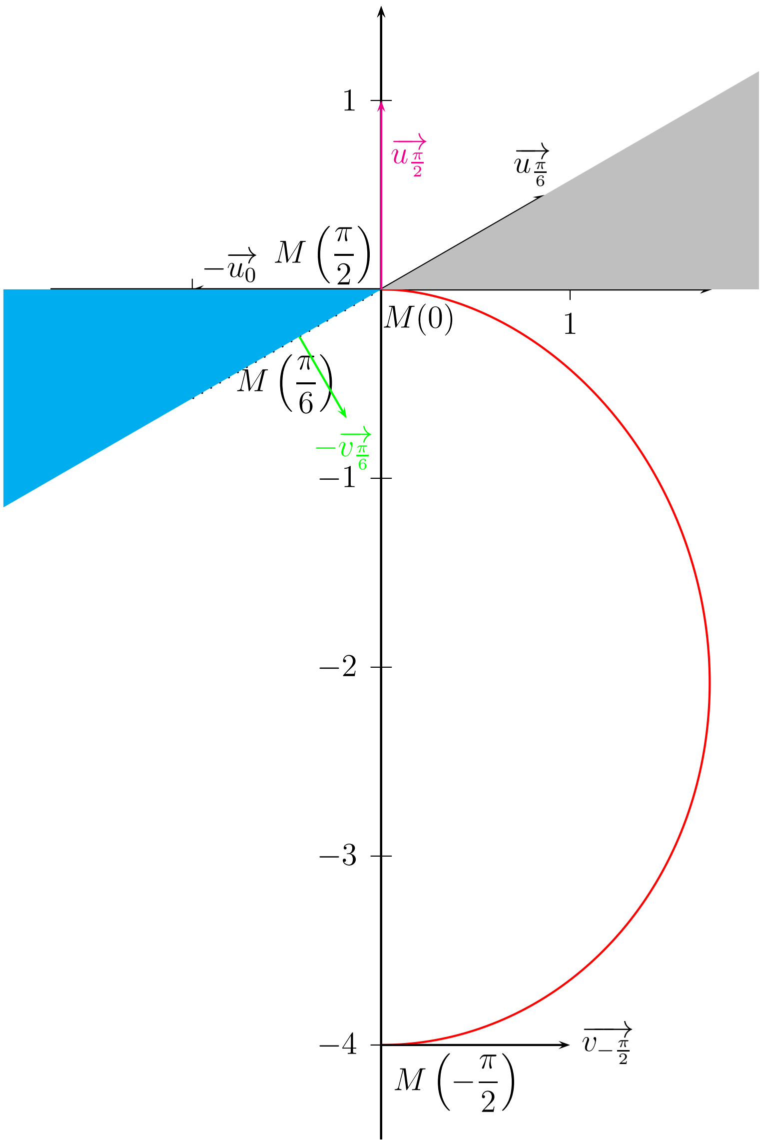
Étape 2. On trace la courbe pour $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2};0\right]$ en remarquant que sur cet intervalle $r(\theta)$ est positif et décroissant de 4 vers 0. Il ne faut pas oublier de respecter les tangentes aux points d'arrivée et de départ.



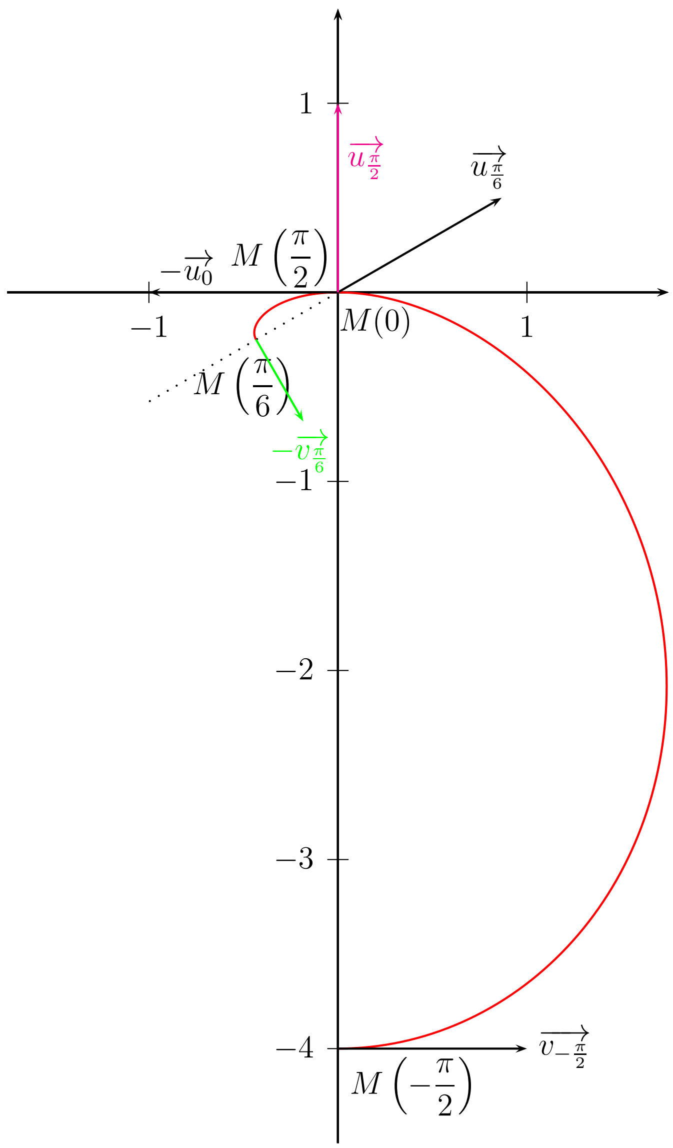
Étape 3. On souhaite maintenant tracer la courbe pour $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$ en remarquant que sur cet intervalle $r(\theta)$ est négatif et décroissant de 0 vers $-\frac{1}{2}$.

Cela signifie, d'une part, que les vecteurs $\overrightarrow{u_\theta}$ vont évoluer dans la zone grise ci-dessous, mais comme $r(\theta)$ est négatif les points $M(\theta)$ vont se retrouver « de l'autre côté » c'est-à-dire dans la zone bleue.

D'autre part, la distance de l'origine du repère au point $M(\theta)$, qui est donnée par $-r(\theta)$, est croissante de 0 vers $\frac{1}{2}$. Donc les points $M(\theta)$ s'éloignent de l'origine.

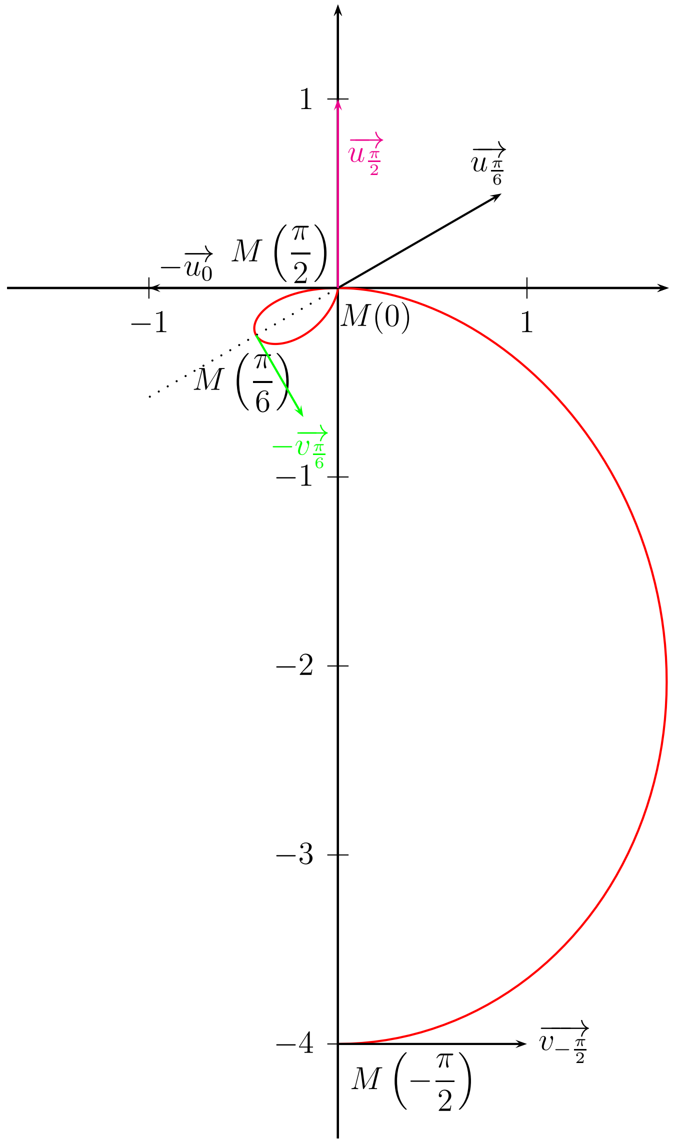


Étape 4. En tenant compte de l'étape 3 et en respectant les tangentes aux points d'arrivée et de départ, on trace la courbe pour $\theta \in \left[0; \dfrac{\pi}{6}\right]$.



Étape 5. On trace la courbe pour $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ en remarquant que sur cet intervalle $r(\theta)$ est négatif et croissant de $-\frac{1}{2}$ vers 0. Il s'agit de procéder dans le même esprit qu'aux étapes 3 et 4.

Ici la distance de l'origine du repère au point $M(\theta)$, qui est donnée par $-r(\theta)$, est décroissante de $\frac{1}{2}$ vers 0. Donc les points $M(\theta)$ se rapprochent de l'origine.




**Fin du corrigé.**