Exercice 1 ($\simeq 7,25$ points). On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ -5 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

On effectue $C_3 := C_3 - C_2$ pour obtenir :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 2+\lambda \\ -5 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

On continue en faisant $L_2 := L_2 + L_3$:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 0 \\ -3 & -\lambda & 0 \\ -5 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$$

Ainsi, en développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$P_A(\lambda) = (-2-\lambda) \times (+1) \times \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

D'où

$$P_A(\lambda) = (-2-\lambda)[-\lambda(-4-\lambda)+3] = (-2-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+3).$$

2. On sait que λ est une valeur propre de A ssi $P_A(\lambda) = 0$.
Or, puisque $P_A(\lambda) = (-2-\lambda)(\lambda^2+4\lambda+3)$, on a :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = 0 \quad & \text{ssi} \quad -2-\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2+4\lambda+3 = 0 \\ & \text{ssi} \quad \lambda = -2 \quad \text{ou} \quad \lambda^2+4\lambda+3 = 0. \end{aligned}$$

Pour le trinôme du second degré $\lambda^2+4\lambda+3$, on calcule son discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 = 2^2$ puis on trouve ses racines -1 et -3.

On peut donc en déduire que :

$$P_A(\lambda) = 0 \quad \text{ssi} \quad \lambda = -2 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1 \quad \text{ou} \quad \lambda = -3.$$

Conclusion. A possède trois valeurs propres : -1 ; -2 et -3.

Remarque. Comme -1 et -3 sont les racines de $\lambda^2+4\lambda+3$, on peut écrire $\lambda^2+4\lambda+3 = (\lambda+1)(\lambda+3)$. Par conséquent, on a $P_A(\lambda) = (-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+3)$, ce qui nous donne une factorisation optimale du polynôme caractéristique de A. En particulier, on peut affirmer que les trois valeurs propres de A sont des valeurs propres simples.

3. • Espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff AV = -V$$

$$\iff \begin{cases} -4x & + & y & + & z & = -x \\ 2x & - & y & + & z & = -y \\ -5x & + & y & - & z & = -z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x & + & y & + & z & = 0 \\ 2x & & & + & z & = 0 \\ -5x & + & y & & & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ z = -2x \\ y = 5x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3x + 5x - 2x = 0 \\ z = -2x \\ y = 5x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ z = -2x \\ y = 5x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = -2x \\ y = 5x \end{cases}$$

Par conséquent,

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff z = -2x \text{ et } y = 5x$$

$$\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 5x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

D'où E_{-1} est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}_1$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

En particulier, $\dim(E_{-1}) = 1$.

- Espace propre E_{-2} associé à la valeur propre -2 :

$$V=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_{-2} \iff AV=-2V$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} -4x & + & y & + & z & =-2x\\ 2x & - & y & + & z & =-2y\\ -5x & + & y & - & z & =-2z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} -2x & + & y & + & z & =0\\ 2x & + & y & + & z & =0\\ -5x & + & y & + & z & =0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} -2x & + & y & + & z & =0\\ 4x & & & & & =0\\ -5x & + & y & + & z & =0 \end{array}\right. \quad \text{en ayant effectué } L_2 := L_2 - L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y+z=0\\ x=0\\ y+z=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=0\\ y=-z \end{array}\right.$$

Par conséquent,

$$V=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_{-2} \iff x=0 \ \text{ et } \ y=-z$$

$$\iff V=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ -z\\ z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 1\end{pmatrix} \ \text{avec } z\in\mathbb{R}.$$

D'où E_{-2} est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}_2$ où $\vec{u}_2=\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

En particulier, $\dim(E_{-2})=1$.

- Espace propre E_{-3} associé à la valeur propre -3 :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3} \iff AV = -3V$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccl} -4x & + & y & + & z & = & -3x \\ 2x & - & y & + & z & = & -3y \\ -5x & + & y & - & z & = & -3z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccl} -x & + & y & + & {\color{red}z} & = 0 & \text{on va prendre } {\color{red}z} \text{ pour pivot} \\ 2x & + & 2y & + & z & = 0 & \\ -5x & + & y & + & 2z & = 0 & \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccl} -x & + & y & + & {\color{red}z} & = 0 & \\ 3x & + & y & & & = 0 & \text{en ayant effectué } L_2 := L_2 - L_1 \\ -3x & - & y & & & = 0 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 - 2 \times L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} -x + (-3x) + z = 0 \\ y = -3x \\ y = -3x \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = 4x \\ y = -3x \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3} \iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x \\ 4x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

D'où E_{-3} est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}_3$ où $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

En particulier, $\dim(E_{-3}) = 1$.

4. A est diagonalisable car elle est de taille 3 et qu'elle possède trois valeurs propres distinctes.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} {\color{red}1} & {\color{green}0} & {\color{blue}1} \\ {\color{red}5} & {\color{green}-1} & {\color{blue}-3} \\ {\color{red}-2} & {\color{green}1} & {\color{blue}4} \end{pmatrix}$. Alors on peut vérifier que P est inversible et :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} {\color{red}-1} & 0 & 0 \\ 0 & {\color{green}-2} & 0 \\ 0 & 0 & {\color{blue}-3} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 ($\simeq 6,25$ points). On considère la matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -15 & -4 & -5 \\ 9 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique :

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 \\ -15 & -4-\lambda & -5 \\ 9 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

On effectue $C_3 := C_3 - C_2$ pour obtenir :

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ -15 & -4-\lambda & -1+\lambda \\ 9 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

On continue en faisant $L_2 := L_2 + L_3$:

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ -6 & -1-\lambda & 0 \\ 9 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient :

$$P_B(\lambda) = (1-\lambda) \times (+1) \times \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 \\ -6 & -1-\lambda \end{vmatrix}.$$

D'où

$$P_B(\lambda) = (1-\lambda) \times [(4-\lambda)(-1-\lambda) + 6] = (1-\lambda) \times [\lambda^2 - 3\lambda + 2].$$

2. On sait que λ est une valeur propre de B ssi $P_B(\lambda) = 0$.
Or, puisque $P_B(\lambda) = (1-\lambda) \times (\lambda^2 - 3\lambda + 2)$, on a

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) = 0 \quad & \text{ssi} \quad 1-\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ & \text{ssi} \quad \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \end{aligned}$$

Concernant le trinôme $\lambda^2 - 3\lambda + 2$, on calcule le discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, puis on déduit ses racines 1 et 2. Ainsi

$$P_B(\lambda) = 0 \quad \text{ssi} \quad \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2$$

Les valeurs propres de B sont donc 1 et 2.

À noter qu'en fait $P_B(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2$; ainsi 1 est une valeur propre double de B, et 2 est une valeur propre simple de B.

3. • Espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff BV = 2V$$

$$\iff \begin{cases} 4x + y + z = 2x \\ -15x - 4y - 5z = 2y \\ 9x + 3y + 4z = 2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -15x - 6y - 5z = 0 \\ 9x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \quad \text{on va prendre } z \text{ pour pivot}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -5x - y = 0 & \text{en ayant effectué } L_2 := L_2 + 5 \times L_1 \\ 5x + y = 0 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 - 2 \times L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ y = -5x \\ y = -5x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x + (-5x) + z = 0 \\ y = -5x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = 3x \\ y = -5x \end{cases}$$

Cela donne :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff \begin{cases} z = 3x \\ y = -5x \end{cases}$$

$$\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -5x \\ 3x \end{pmatrix}$$

$$\iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

D'où E_2 est la droite vectorielle portée par le vecteur $\vec{u}_1$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

En particulier, $\dim(E_2) = 1$.

- Espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff BV = V$$

$$\iff \begin{cases} 4x & + & y & + & z & = x \\ -15x & - & 4y & - & 5z & = y \\ 9x & + & 3y & + & 4z & = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x & + & y & + & \color{red}{z} & = 0 \\ -15x & - & 5y & - & 5z & = 0 \\ 9x & + & 3y & + & 3z & = 0 \end{cases} \quad \text{on va prendre } \color{red}{z} \text{ pour pivot}$$

$$\iff \begin{cases} 3x + y + z = 0 & \\ 0 = 0 & \text{en ayant effectué } L_2 := L_2 + 5 \times L_1 \\ 0 = 0 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 - 3 \times L_1 \end{cases}$$

$$\iff 3x + y + z = 0$$

$$\iff z = -3x - y$$

Par conséquent,

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -3x - y \end{pmatrix}$$

$$\iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

D'où E_1 est le plan vectoriel dirigé par les vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ où $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

En particulier, $\dim(E_1) = 2$.

4. Puisque $\dim(E_2) + \dim(E_1) = 1 + 2 = 3$ et que B est de taille 3, B est diagonalisable.
Autre façon de présenter les choses : les sous-espaces propres E_2 et E_1 fournissent, en tout, trois vecteurs propres : $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$. Ainsi on a assez de vecteurs pour remplir une matrice P de taille 3 qui permettra de voir que $D = P^{-1}BP$ est diagonale, ce qui revient à dire que B est diagonalisable.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{green}{1} & \color{blue}{0} \\ \color{red}{-5} & \color{green}{0} & \color{blue}{1} \\ \color{red}{3} & \color{green}{-3} & \color{blue}{-1} \end{pmatrix}$. Alors on peut vérifier que P est inversible et :

$$D = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \color{red}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \color{green}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \color{blue}{1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 ($\simeq 6,5$ points). Étant donné un réel m, on considère la matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 4 & m-1 & -6 \\ 0 & m+2 & 0 \\ 1 & 2-2m & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique :

$$P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & m-1 & -6 \\ 0 & m+2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-2m & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième ligne, on obtient :

$$P_C(\lambda) = (m+2-\lambda) \times (+1) \times \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix}.$$

D'où

$$P_C(\lambda) = (m+2-\lambda) \times [(4-\lambda)(-3-\lambda)+6] = (m+2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6).$$

2. On sait que λ est une valeur propre de C ssi $P_C(\lambda) = 0$.
Or, puisque $P_C(\lambda) = (m+2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6)$, on a

$$\begin{array}{rlrcl} P_C(\lambda) = 0 & \text{ssi} & m+2-\lambda = 0 & \text{ou} & \lambda^2-\lambda-6=0 \\ & \text{ssi} & \lambda = m+2 & \text{ou} & \lambda^2-\lambda-6=0 \end{array}$$

Concernant le trinôme $\lambda^2-\lambda-6$, on calcule le discriminant $\Delta = 1+24 = 25 = 5^2$, puis on déduit ses racines -2 et 3. Ainsi

$$P_C(\lambda) = 0 \quad \text{ssi} \quad \lambda = m+2 \text{ ou } \lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 3$$

Les valeurs propres de C sont donc : $m+2$; -2 et 3. On en déduit alors que :

• Si $m+2 = -2$, c'est-à-dire si $m = -4$, alors C possède exactement deux valeurs propres : -2 (valeur propre double) et 3 (valeur propre simple).
• Si $m+2 = 3$, c'est-à-dire si $m = 1$, alors C possède exactement deux valeurs propres : -2 (valeur propre simple) et 3 (valeur propre double).
• Si $m+2$ est différent à la fois de -2 et de 3, c'est-à-dire si $m \neq -4$ et $m \neq 1$, alors C possède trois valeurs propres distinctes : -2 ; 3 et $m+2$.

3. • Dans le cas où $m \neq -4$ et $m \neq 1$, on vient de voir que C possède trois valeurs propres distinctes. Comme C est de taille 3, on sait que C est obligatoirement diagonalisable.

• Dans le cas où $m = 1$, C possède exactement deux valeurs propres -2 et 3.
De plus, -2 étant une valeur propre simple, on est sûr que $\dim(E_{-2}) = 1$;
3 étant une valeur propre double, on est sûr que $\dim(E_3) = 1$ ou 2.
Or, puisque C est de taille 3, C est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_{-2}) + \dim(E_3) = 3$.
Par conséquent, pour savoir si C est diagonalisable, il suffit de déterminer l'espace propre E_3 : si c'est une droite ($\dim(E_3) = 1$), C ne sera pas diagonalisable ; si c'est un plan ($\dim(E_3) = 2$), C sera diagonalisable.

$$
\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 &\iff CV = 3V \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 4x & & - & 6z & = 3x \\ & 3y & & & = 3y \\ x & & - & 3z & = 3z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & - & 6z & = 0 \\ & 0 & & & = 0 \\ x & & - & 6z & = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 6z \\ 0 = 0 \\ x = 6z \end{array} \right. \\
&\iff x = 6z
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 &\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6z \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff V = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

D'où E_3 est le plan vectoriel dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion. Lorsque $m = 1$, la matrice C est diagonalisable.

• Dans le cas où $m = -4$, C possède deux valeurs propres -2 et 3 ; et la valeur propre -2 est double. Pour savoir si C est diagonalisable, il suffit de déterminer l'espace propre E_{-2} : si c'est une droite, C ne sera pas diagonalisable ; si c'est un plan, C sera diagonalisable.

$$
\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} &\iff CV = -2V \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 4x & - & 5y & - & 6z & = -2x \\ & - & 2y & & & = -2y \\ x & + & 10y & - & 3z & = -2z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 6x & - & 5y & - & 6z & = 0 \\ & & 0 & & & = 0 \\ x & + & 10y & - & z & = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} -65y = 0 \\ 0 = 0 \\ x + 10y - z = 0 \end{array} \right. \qquad \text{en ayant effectué } L_1 := L_1 - 6 \times L_3 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x + 10 \times 0 - z = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ z = x \end{array} \right. \\
&\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

D'où E_{-2} est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion. Lorsque $m = -4$, la matrice C n'est pas diagonalisable.

- En résumé, C est diagonalisable ssi $m \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

FIN DU CORRIGÉ