Exercice 1 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ -3 & 3-\lambda & -2 \\ 5 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième colonne, on obtient :

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda) \times (+1) \times \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix}.$$

D'où

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)[(3-\lambda)(-1-\lambda) - 5] = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8).$$

2. On sait que λ est une valeur propre de A ssi $P_A(\lambda) = 0$.
Or, puisque $P_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 8)$, on a :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = 0 \quad & \text{ssi} \quad 3 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \\ & \text{ssi} \quad \lambda = 3 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0. \end{aligned}$$

Pour le trinôme du second degré $\lambda^2 - 2\lambda - 8$, on calcule son discriminant $\Delta = 4 + 32 = 36 = 6^2$ puis on trouve ses racines 4 et -2.

On peut donc en déduire que :

$$P_A(\lambda) = 0 \quad \text{ssi} \quad \lambda = 3 \quad \text{ou} \quad \lambda = 4 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2.$$

Conclusion. A possède trois valeurs propres : -2 ; 3 et 4.

Remarque. Comme -2 et 4 sont les racines de $\lambda^2 - 2\lambda - 8$, on peut écrire $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda + 2)(\lambda - 4)$. Par conséquent, on a $P_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-4)$, ce qui nous donne une factorisation optimale du polynôme caractéristique de A. En particulier, on peut affirmer que les trois valeurs propres de A sont des valeurs propres simples.

3. • Espace propre E_{-2} associé à la valeur propre -2 :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \iff AV = -2V$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & & & + & z & = -2x \\ -3x & + & 3y & - & 2z & = -2y \\ 5x & & & - & z & = -2z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = -5x \\ 5y = 3x + 2z \\ z = -5x \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = -5x \\ 5y = 3x + 2 \times (-5x) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = -5x \\ 5y = -7x \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = -5x \\ y = -\frac{7}{5}x \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \iff z = -5x \text{ et } y = -\tfrac{7}{5}x$$

$$\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{7}{5}x \\ -5x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{5} \\ -5 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

D'où E_{-2} est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}_1$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{5} \\ -5 \end{pmatrix}$.

En particulier, $\dim(E_{-1}) = 1$.

• Espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \iff AV = 3V$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & & & + & z & = 3x \\ -3x & + & 3y & - & 2z & = 3y \\ 5x & & & - & z & = 3z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ -3x - 2z = 0 \\ 5x - 4z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.$$

Par conséquent,

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \iff x = 0 \text{ et } z = 0$$
$$\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}.$$

D'où E_3 est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}_2$ où $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En particulier, $\dim(E_3) = 1$.

- Espace propre E_4 associé à la valeur propre 4 :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \iff AV = 4V$$
$$\iff \begin{cases} 3x + z = 4x \\ -3x + 3y - 2z = 4y \\ 5x - z = 4z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = x \\ y = -3x - 2z \\ 5x = 5z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = x \\ y = -3x - 2x \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z = x \\ y = -5x \end{cases}$$

Par conséquent,

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -5x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

D'où E_4 est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\vec{u}_3$ où $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En particulier, $\dim(E_4) = 1$.

4. A est diagonalisable car elle est de taille 3 et qu'elle possède trois valeurs propres distinctes.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{7}{5} & 1 & -5 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors on peut vérifier que P est inversible et :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 ($\simeq 6,25$ points). On considère la matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique :

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 6 \\ 4 & -1-\lambda & 6 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

On effectue $L_1 := L_1 - L_2$ pour obtenir :

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 3+\lambda & 0 \\ 4 & -1-\lambda & 6 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

On continue en faisant $C_2 := C_2 + C_1$:

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & 6 \\ 2 & 3 & -\lambda \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$P_B(\lambda) = (-3-\lambda) \times (+1) \times \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

D'où

$$P_B(\lambda) = (-3-\lambda) \times [-\lambda(3-\lambda) - 18] = (-3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 18).$$

2. On sait que λ est une valeur propre de B ssi $P_B(\lambda) = 0$.
Or, puisque $P_B(\lambda) = (-3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 18)$, on a

$$\begin{array}{llcll} P_B(\lambda) = 0 & \text{ssi} & -3-\lambda = 0 & \text{ou} & \lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0 \\ & \text{ssi} & \lambda = -3 & \text{ou} & \lambda^2 - 3\lambda - 18 = 0 \end{array}$$

Concernant le trinôme $\lambda^2 - 3\lambda - 18$, on calcule le discriminant $\Delta = 9 + 4 \times 18 = 9 + 72 = 81 = 9^2$, puis on déduit ses racines 6 et -3. Ainsi

$$P_B(\lambda) = 0 \quad \text{ssi} \quad \lambda = 6 \text{ ou } \lambda = -3$$

Les valeurs propres de B sont donc 6 et -3.

À noter qu'en fait $P_B(\lambda) = (-3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 18) = (-3-\lambda)(\lambda - 6)(\lambda + 3) = -(\lambda - 6)(\lambda + 3)^2$; ainsi -3 est une valeur propre double de B, et 6 est une valeur propre simple de B.

3. • Espace propre E_6 associé à la valeur propre 6 :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_6 \iff BV = 6V$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & 6z & = 6x \\ 4x & - & y & + & 6z & = 6y \\ 2x & + & y & & & = 6z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -5x & + & 2y & + & 6{\color{red}z} & = 0 \\ 4x & - & 7y & + & 6z & = 0 \\ 2x & + & y & - & 6z & = 0 \end{array} \right. \quad \text{on va prendre } {\color{red}z} \text{ pour pivot}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrll} -5x & + & 2y & + & 6{\color{red}z} & = 0 & \\ 9x & - & 9y & & & = 0 & \text{en ayant effectué } L_2 := L_2 - L_1 \\ -3x & + & 3y & & & = 0 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 + L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} -5x + 2y + 6z = 0 \\ y = x \\ y = x \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} -5x + 2x + 6z = 0 \\ y = x \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{x}{2} \\ y = x \end{array} \right.$$

Cela donne :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_6 \iff \left\{ \begin{array}{l} z = \frac{x}{2} \\ y = x \end{array} \right.$$

$$\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \frac{x}{2} \end{pmatrix}$$

$$\iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

D'où E_6 est la droite vectorielle portée par le vecteur $\vec{u}_1$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

En particulier, $\dim(E_6) = 1$.

- Espace propre E_{-3} associé à la valeur propre -3 :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3} \iff BV = -3V$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & 6z & = -3x \\ 4x & - & y & + & 6z & = -3y \\ 2x & + & y & & & = -3z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 4x & + & 2y & + & 6z & = 0 \\ 4x & + & 2y & + & 6z & = 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrll} 2x & + & y & + & 3z & = 0 & \text{en ayant effectué } L_1 := \frac{1}{2} \times L_1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = 0 & \text{en ayant effectué } L_2 := \frac{1}{2} \times L_2 \\ 2x & + & y & + & 3z & = 0 & \end{array} \right.$$

$$\iff 2x + y + 3z = 0$$

$$\iff y = -2x - 3z$$

Par conséquent,

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-3} \iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x - 3z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}.$$

D'où E_{-3} est le plan vectoriel dirigé par les vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ où $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En particulier, $\dim(E_{-3}) = 2$.

4. Puisque $\dim(E_6) + \dim(E_{-3}) = 1 + 2 = 3$ et que B est de taille 3, B est diagonalisable.
Autre façon de présenter les choses : les espaces propres E_6 et E_{-3} fournissent, en tout, trois vecteurs propres : $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$. Ainsi on a assez de vecteurs pour remplir une matrice P de taille 3 qui permettra de voir que $D = P^{-1}BP$ est diagonale, ce qui revient à dire que B est diagonalisable.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors on peut vérifier que P est inversible et :

$$D = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 ($\simeq 6,5$ points). Étant donné un réel m, on considère la matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 6-m & 6-2m & -3 \\ -1 & m-1 & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & m-4 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique :

$$P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 6-m-\lambda & 6-2m & -3 \\ -1 & m-1-\lambda & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & m-4-\lambda \end{vmatrix}$$

On effectue $L_1 := L_1 + L_2$ pour obtenir :

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-m-\lambda & 5-m-\lambda & 0 \\ -1 & m-1-\lambda & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & m-4-\lambda \end{vmatrix}$$

On continue en faisant $C_2 := C_2 - C_1$:

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-m-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & m-\lambda & 3 \\ \frac{1}{3} & -1 & m-4-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$P_C(\lambda) = (5-m-\lambda) \times (+1) \times \begin{vmatrix} m-\lambda & 3 \\ -1 & m-4-\lambda \end{vmatrix}.$$

D'où

$$P_C(\lambda) = (5-m-\lambda) \times [(m-\lambda)(m-4-\lambda) + 3] = (5-m-\lambda)[\lambda^2 - (2m-4)\lambda + m^2 - 4m + 3].$$

2. On sait que λ est une valeur propre de C ssi $P_C(\lambda) = 0$.
Or, puisque $P_C(\lambda) = (5-m-\lambda)[\lambda^2 - (2m-4)\lambda + m^2 - 4m + 3]$, on a

$$\begin{aligned} P_C(\lambda) = 0 \quad &\text{ssi} \quad 5-m-\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - (2m-4)\lambda + m^2 - 4m + 3 = 0 \\ &\text{ssi} \quad \lambda = 5-m \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - (2m-4)\lambda + m^2 - 4m + 3 = 0 \end{aligned}$$

Concernant le trinôme $\lambda^2 - (2m-4)\lambda + m^2 - 4m + 3$, on calcule le discriminant :

$$\Delta = (2m-4)^2 - 4(m^2 - 4m + 3) = 4m^2 - 16m + 16 - 4m^2 + 16m - 12 = 4 = 2^2,$$

puis on déduit ses racines $\frac{2m-4+2}{2} = m-1$ et $\frac{2m-4-2}{2} = m-3$. Ainsi

$$P_C(\lambda) = 0 \quad \text{ssi} \quad \lambda = 5-m \text{ ou } \lambda = m-1 \text{ ou } \lambda = m-3$$

Les valeurs propres de C sont donc : $5-m$; $m-1$ et $m-3$. Après avoir remarqué que $m-3$ est toujours différent de $m-1$ pour tout réel m, on en déduit alors que :

- Si $5-m = m-3$, c'est-à-dire si $8 = 2m$, autrement dit si $m = 4$, alors C possède exactement deux valeurs propres : $5-m = m-3 = 1$ (valeur propre double) et $m-1 = 3$ (valeur propre simple).

• Si $5-m=m-1$, c'est-à-dire si $6=2m$, autrement dit si $m=3$, alors C possède exactement deux valeurs propres : $5-m=m-1=2$ (valeur propre double) et $m-3=0$ (valeur propre simple).

• Dans tous les autres cas, c'est-à-dire si $m\neq 3$ et $m\neq 4$, alors C possède trois valeurs propres distinctes : $5-m$; $m-1$ et $m-3$.

3. • Dans le cas où $m\neq 3$ et $m\neq 4$, on vient de voir que C possède trois valeurs propres distinctes. Comme C est de taille 3, on sait que C est obligatoirement diagonalisable.

• Dans le cas où $m=4$, C possède exactement deux valeurs propres 1 et 3.

De plus, 3 étant une valeur propre simple, on est sûr que $\dim(E_3)=1$;

1 étant une valeur propre double, on est sûr que $\dim(E_1)=1$ ou 2.

Or, puisque C est de taille 3, C est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_3)+\dim(E_1)=3$.

Par conséquent, pour savoir si C est diagonalisable, il suffit de déterminer l'espace propre E_1 : si c'est une droite ($\dim(E_1)=1$), C ne sera pas diagonalisable ; si c'est un plan ($\dim(E_1)=2$), C sera diagonalisable.

$$
\begin{aligned}
V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1 &\iff CV=V\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & 2y & - & 3z & =x\\ -x & + & 3y & + & 3z & =y\\ \frac{1}{3}x & - & \frac{2}{3}y & & & =z \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & - & 2y & - & 3z & =0\\ -x & + & 2y & + & 3z & =0\\ \frac{1}{3}x & - & \frac{2}{3}y & - & z & =0 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} x & - & 2y & - & 3z & =0\\ -x & + & 2y & + & 3z & =0\\ x & - & 2y & - & 3z & =0 \end{array}\right. \quad \text{en ayant effectué } L_3:=3\times L_3\\
&\iff x-2y-3z=0\\
&\iff x=2y+3z
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E_1 &\iff V=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y+3z\\y\\z\end{pmatrix}\\
&\iff V=y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{avec } y\in\mathbb{R} \text{ et } z\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

D'où E_1 est le plan vectoriel dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ où $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Conclusion. Lorsque $m=4$, la matrice C est diagonalisable.

• Dans le cas où $m=3$, C possède deux valeurs propres 2 et 0 ; et la valeur propre 2 est double. Pour savoir si C est diagonalisable, il suffit de déterminer l'espace propre E_2 : si c'est une droite, C

ne sera pas diagonalisable ; si c'est un plan, C sera diagonalisable.

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff CV = 2V$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & & & - & 3z & = 2x \\ -x & + & 2y & + & 3z & = 2y \\ \frac{1}{3}x & - & \frac{2}{3}y & - & z & = 2z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 3z \\ x = 3z \\ \frac{1}{3} \times (3z) - \frac{2}{3}y - 3z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 3z \\ -\frac{2}{3}y - 2z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 3z \\ y = -\frac{3}{2} \times 2z = -3z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y = -3z \\ x = 3z \end{array} \right.$$

$$\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ -3z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R}.$$

D'où E_2 est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion. Lorsque $m = 3$, la matrice C n'est pas diagonalisable.

- En résumé, C est diagonalisable ssi $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Fin du corrigé