Exercice 1 (4,5 points). Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $2y' - 3y = 18 - 5\sin(2x)$.

L'équation (E) s'écrit aussi $y' - \frac{3}{2}y = 9 - \frac{5}{2}\sin(2x)$,
qui est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$ avec $a(x) = -\frac{3}{2}$ et $f(x) = 9 - \frac{5}{2}\sin(2x)$.

- Solutions y_H de l'équation homogène ?
  Avec les notations du cours, on a $a(x) = -\frac{3}{2}$ dont une primitive est donnée par $A(x) = -\frac{3}{2}x$.
  Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$ avec λ une constante réelle.

- Solution particulière y_P de (E) ?
  Ici $a(x) = -2 = a$ est une constante, ce qui permet d'utiliser le tableau donné dans l'énoncé.
  Cependant on doit d'abord utiliser le principe de superposition :
  on va d'abord chercher une solution particulière y_{P1} de l'équation (E_1) $2y' - 3y = 18$,
  puis une solution particulière y_{P2} de l'équation (E_2) $2y' - 3y = -5\sin(2x)$.

  ▶ Détermination de y_{P1} :
  $y_{P1} = \frac{18}{-3} = -6$ est solution évidente.

  ▶ Détermination de y_{P2} :
  Comme $f_2(x) = -5\sin(2x) = \lambda_1\cos(\omega x) + \lambda_2\sin(\omega x)$ avec $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$ et $\omega = 2$, on utilise la dernière ligne du tableau fourni dans l'énoncé.

  On va donc chercher y_{P2} sous la forme $y_{P2} = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$ avec α, β des constantes réelles à déterminer.
  En particulier on a $y'_{P2} = -2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x)$.
  On veut que $2y'_{P2} - 3y_{P2} = -5\sin(2x)$, c'est-à-dire

$$-4\alpha\sin(2x) + 4\beta\cos(2x) - 3(\alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)) = -5\sin(2x).$$

  Cela donne $(4\beta - 3\alpha)\cos(2x) + (-4\alpha - 3\beta)\sin(2x) = -5\sin(2x)$.
  On en déduit que $4\beta - 3\alpha = 0$ et que $-4\alpha - 3\beta = -5$.
  La première égalité permet d'écrire $\beta = \frac{3\alpha}{4}$, que l'on peut reporter dans la seconde égalité :

$$-4\alpha - 3 \times \frac{3\alpha}{4} = -5.$$

  En multipliant par 4 cette dernière égalité, on obtient alors $-16\alpha - 9\alpha = -20$, ce qui donne $-25\alpha = -20$ et finalement

$$\alpha = \frac{-20}{-25} = \frac{20}{25} = \frac{4 \times 5}{5 \times 5} = \frac{4}{5}.$$

  Ainsi

$$\beta = \frac{3\alpha}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}.$$

  D'où $y_{P2} = \dfrac{4}{5}\cos(2x) + \dfrac{3}{5}\sin(2x)$.

  ▶ On déduit de ce qui précède que $y_P = y_{P1} + y_{P2} = -6 + \dfrac{4}{5}\cos(2x) + \dfrac{3}{5}\sin(2x)$ est une solution particulière de l'équation (E).

- Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent
  $y = y_H + y_P = \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} - 6 + \dfrac{4}{5}\cos(2x) + \dfrac{3}{5}\sin(2x)$ avec λ une constante réelle.

Exercice 2 (5 points). Résolution sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ xy' + 2y = \cos(3x).$$

Après avoir divisé par x (possible car $x \neq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' + \frac{2}{x} \times y = \frac{\cos(3x)}{x}.$$

Cette dernière équation est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$ avec $a(x) = \frac{2}{x}$ et $f(x) = \frac{\cos(3x)}{x}$.

• Avec les notations du cours, $a(x) = \dfrac{2}{x} = 2 \times \dfrac{1}{x}$ qui est de la forme $2 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = x$ (et donc $u'(x) = 1$). Une primitive A sur $]0;+\infty[$ de la fonction a est donc définie par

$$A(x) = 2 \times \ln|u(x)| = 2 \times \ln|x| = 2\ln(x)$$

puisque $x > 0$ pour tout réel $x \in]0;+\infty[$. Par conséquent

$$y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{-2\ln(x)}$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Or pour tout réel t, on a $\mathrm{e}^{-2t} = (\mathrm{e}^t)^{-2} = \frac{1}{(\mathrm{e}^t)^2}$. D'où,

$$y_H = \lambda \times \frac{1}{(\mathrm{e}^{\ln x})^2} = \lambda \times \frac{1}{x^2}.$$

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda \times \dfrac{1}{x^2}$ avec λ une constante réelle.

• Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times \dfrac{1}{x^2}$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times \frac{1}{x^2} + \lambda(x) \times \left(\frac{1}{x^2}\right)'.$$

Pour dériver $\frac{1}{x^2}$, on peut soit utiliser la formule de dérivation d'un quotient, soit utiliser la formule $(u^n)' = nu'u^{n-1}$; cette seconde méthode permet d'écrire :

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2 \times 1 \times x^{-3} = \frac{-2}{x^3}.$$

Par conséquent,

$$y_P' = \lambda'(x) \times \frac{1}{x^2} + \lambda(x) \times \frac{-2}{x^3}.$$

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$xy_P' + 2y_P = \cos(3x),$$

c'est-à-dire

$$x\left[\lambda'(x) \times \frac{1}{x^2} + \lambda(x) \times \frac{-2}{x^3}\right] + 2 \times \lambda(x) \times \frac{1}{x^2} = \cos(3x),$$

c'est-à-dire encore

$$\lambda'(x) \times \frac{1}{x} + \lambda(x) \times \frac{-2}{x^2} + 2 \times \lambda(x) \times \frac{1}{x^2} = \cos(3x),$$

Autrement dit,

$$\lambda'(x) \times \frac{1}{x} = \cos(3x),$$

ce qui donne

$$\lambda'(x) = x\cos(3x).$$

Pour déterminer $\lambda(x)$, on va calculer $\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties : on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(3x) = \frac{1}{3} \times 3\cos(3x)$. Alors $u'(x) = 1$ et, puisqu'une primitive de $w'\cos w$ est $\sin w$, on prend $v(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$ en ayant posé $w(x) = 3x$. D'où, en appliquant la formule d'IPP $\displaystyle\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)] - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$, on obtient :

$$\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x\sin(3x)\right] - \int \frac{1}{3}\sin(3x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x\sin(3x)\right] - \frac{1}{3} \times \int \sin(3x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme une primitive de $w'\sin w$ est $-\cos w$, on obtient en posant $w(x) = 3x$:

$$\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \int 3\sin(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{9} \times [-\cos(3x)] + c,$$

où c est une constante réelle quelconque. Finalement

$$\int x\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + c,$$

ce qui nous donne l'ensemble de toutes les primitives de la fonction $x \mapsto x\cos(3x)$.

Comme λ est **une** primitive de la fonction $x \mapsto x\cos(3x)$, on peut prendre $c = 0$ dans le calcul précédent et on a alors :

$$\lambda(x) = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x).$$

D'où

$$y_P = \lambda(x) \times \frac{1}{x^2} = \frac{\sin(3x)}{3x} + \frac{\cos(3x)}{9x^2}.$$

- Conclusion : les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \frac{\lambda}{x^2} + \frac{\sin(3x)}{3x} + \frac{\cos(3x)}{9x^2}$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 3 (5 points). Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ (1+x^2)y' - 2xy = (1+x)^2.$$

Après avoir divisé par x^2+1 (possible car expression toujours strictement positive, donc différente de zéro), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' - \frac{2x}{x^2+1} \times y = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}.$$

• Avec les notations du cours, $a(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1} = -1 \times \dfrac{2x}{x^2+1}$ qui est de la forme $-1 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = x^2+1$ (on a bien $u'(x) = 2x$). Une primitive A sur $\mathbb{R}$ de la fonction a est donc définie par $A(x) = -1 \times \ln|u(x)| = -\ln|x^2+1| = -\ln(x^2+1)$ puisque $x^2+1 > 0$ pour tout réel x. Par conséquent $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{\ln(x^2+1)} = \lambda \times (x^2+1)$ avec λ une constante réelle quelconque.

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda \times (x^2+1)$ avec λ une constante réelle.

• Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times (x^2+1)$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times (x^2+1) + \lambda(x) \times 2x.$$

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$(x^2+1)y_P' - 2xy_P = (1+x)^2,$$

c'est-à-dire

$$(x^2+1)\left[\lambda'(x) \times (x^2+1) + \lambda(x) \times 2x\right] - 2x\lambda(x) \times (x^2+1) = (1+x)^2.$$

Autrement dit,

$$(x^2+1)^2\lambda'(x) + 2x(x^2+1)\lambda(x) - 2x(x^2+1)\lambda(x) = (1+x)^2,$$

ce qui donne

$$(x^2+1)^2\lambda'(x) = (1+x)^2.$$

Ainsi

$$\lambda'(x) = \frac{(1+x)^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+2x+x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Or on sait qu'une primitive de $\dfrac{1}{x^2+1}$ est $\arctan x$.

De plus $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ est de la forme $\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$ en prenant $u(x) = x^2+1$ (et on a bien $u'(x) = 2x$). Par conséquent, une primitive de $\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ est $\dfrac{-1}{u(x)}$, c'est-à-dire $-\dfrac{1}{x^2+1}$.

On peut donc prendre

$$\lambda(x) = \arctan(x) - \frac{1}{x^2+1}.$$

D'où

$$y_P = \lambda(x) \times (x^2+1) = \left(\arctan(x) - \frac{1}{x^2+1}\right) \times (x^2+1) = (x^2+1)\arctan(x) - 1.$$

• Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda(x^2+1) + (x^2+1)\arctan(x) - 1$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 4 (5,5 points). On considère l'équation différentielle (E) : $2y'' - y' - y = 36x\,\mathrm{e}^x$.

1. Résolution de l'équation homogène (H) : $2y'' - y' - y = 0$.

   Les solutions de l'équation caractéristique $2r^2 - r - 1 = 0$ sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -\dfrac{1}{2}$ (discriminant $\Delta = 3^2$).

   Donc $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^x + \mu\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$, où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

2. Cherchons une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $y_P = (\alpha x^2 + \beta x)\,\mathrm{e}^x$ où α et β sont des constantes réelles à déterminer.

   Alors, en dérivant avec la formule de dérivation d'un produit, on obtient

   $$y_P' = (2\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^x + (\alpha x^2 + \beta x)\,\mathrm{e}^x = (\alpha x^2 + 2\alpha x + \beta x + \beta)\,\mathrm{e}^x\,.$$

   Puis, en dérivant y_P' (toujours avec la formule de dérivation d'un produit), on obtient

   $$y_P'' = (2\alpha x + 2\alpha + \beta)\,\mathrm{e}^x + (\alpha x^2 + 2\alpha x + \beta x + \beta)\,\mathrm{e}^x = (\alpha x^2 + 4\alpha x + \beta x + 2\alpha + 2\beta)\,\mathrm{e}^x\,.$$

   Ainsi y_P vérifie (E) si et seulement si $2y_P'' - y_P' - y_P = 36x\,\mathrm{e}^x$,

   ssi $2(\alpha x^2 + 4\alpha x + \beta x + 2\alpha + 2\beta)\,\mathrm{e}^x - (\alpha x^2 + 2\alpha x + \beta x + \beta)\,\mathrm{e}^x - (\alpha x^2 + \beta x)\,\mathrm{e}^x = 36x\,\mathrm{e}^x$,

   ssi $2\,(\alpha x^2 + 4\alpha x + \beta x + 2\alpha + 2\beta) - (\alpha x^2 + 2\alpha x + \beta x + \beta) - (\alpha x^2 + \beta x) = 36x$,

   ssi $(2\alpha - \alpha - \alpha)x^2 + (8\alpha + 2\beta - 2\alpha - \beta - \beta)x + (4\alpha + 4\beta - \beta) = 36x$,

   ssi $6\alpha x + (4\alpha + 3\beta) = 36x$.

   Par identification de polynômes, on en déduit que $6\alpha = 36$ (termes en x) et que $4\alpha + 3\beta = 0$ (termes constants).

   La première égalité nous donne $\alpha = \dfrac{36}{6} = 6$, puis la seconde $\beta = -\dfrac{4\alpha}{3} = -\dfrac{4 \times 6}{3} = -4 \times 2 = -8$.

   D'où $y_P = (6x^2 - 8x)\,\mathrm{e}^x$.

3. Déterminons l'unique solution de l'équation $2y'' - y' - y = 36x\,\mathrm{e}^x$ vérifiant les deux conditions suivantes :

   $$y(0) = 3 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} y(x) = 0.$$

   On déduit des questions précédentes que les solutions de (E) sont données par

   $$y = y_H + y_P = \lambda\,\mathrm{e}^x + \mu\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + (6x^2 - 8x)\,\mathrm{e}^x$$

   où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

   Alors $y(0) = 3$ ssi $\lambda + \mu = 3$.

   Intéressons-nous maintenant à la condition portant sur la limite quand $x \to -\infty$:

   Par croissances comparées, on sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2\,\mathrm{e}^x = 0$. Par conséquent, pour n'importe quelle constante λ, on a :

   $$\lim_{x \to -\infty} \left(\lambda\,\mathrm{e}^x + (6x^2 - 8x)\,\mathrm{e}^x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\lambda\,\mathrm{e}^x + 6x^2\,\mathrm{e}^x - 8x\,\mathrm{e}^x\right) = \lambda \times 0 + 6 \times 0 - 8 \times 0 = 0.$$

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to-\infty} \mu\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = 0$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{t} = +\infty$. On a donc 3 cas possibles pour le calcul de $\lim\limits_{x\to-\infty} \mu\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$:

- si $\mu > 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \mu\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = +\infty$;
- si $\mu = 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \mu\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0$;
- si $\mu < 0$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \mu\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = -\infty$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0$ si et seulement si $\mu = 0$.

En utilisant l'égalité $\lambda + \mu = 3$ trouvée plus haut, on obtient alors $\lambda = 3$.

Finalement l'unique solution de l'équation $2y'' - y' - y = 36x\,\mathrm{e}^{x}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$y(0) = 3 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$$

est la fonction définie par :

$$y = 3\,\mathrm{e}^{x} + (6x^2 - 8x)\,\mathrm{e}^{x} = (3 + 6x^2 - 8x)\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

Fin du corrigé.