Exercice 1 ($\simeq 5,5$ points). On considère l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ 3y' - 2y = 8x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

1. Résolution de l'équation différentielle (E) sur $\mathbb{R}$.

   • Après avoir divisé par 3, l'équation (E) s'écrit $y' - \frac{2}{3}y = \frac{8}{3}x^2\,\mathrm{e}^{2x}$; elle est donc de la forme $y' + a(x)y = f(x)$ avec $a(x) = -\frac{2}{3}$ et $f(x) = \frac{8}{3}x^2\,\mathrm{e}^{2x}$.
   On a $a(x) = -\frac{2}{3}$ dont une primitive A est donnée par $A(x) = -\frac{2}{3}x$.
   Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x}$ avec λ une constante réelle.

   • Solution particulière y_P de (E) ?
   Ici $a(x) = -\frac{2}{3} = a$ est une constante, ce qui permet d'utiliser le tableau donné dans l'énoncé.

   Comme $f(x) = \frac{8}{3}x^2\,\mathrm{e}^{2x} = P(x)\,\mathrm{e}^{kx}$ avec $k = 2 \neq -a$ (car $2 \neq \frac{2}{3}$) et $P(x) = \frac{8}{3}x^2$ qui est un polynôme de degré 2, le tableau donné dans l'énoncé nous permet de voir qu'on doit chercher y_P sous la forme $y_P = Q(x)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec $Q(x)$ un polynôme de degré 2. Autrement dit on va écrire $y_P = (bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec b, c, d des constantes réelles à déterminer. Il reste à traduire le fait que $y_P = (bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{2x}$ doit vérifier l'équation différentielle (E) $3y' - 2y = 8x^2\,\mathrm{e}^{2x}$.

   Ainsi, pour tout réel x, on a :
   $3y'_P - 2y_P = 8x^2\,\mathrm{e}^{2x}$ si et seulement si $3 \times ((bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{2x})' - 2 \times (bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{2x} = 8x^2\,\mathrm{e}^{2x}$,
   ssi $3 \times [(2bx + c)\,\mathrm{e}^{2x} + (bx^2 + cx + d) \times 2\,\mathrm{e}^{2x}] - 2 \times (bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{2x} = 8x^2\,\mathrm{e}^{2x}$,
   ssi $3 \times [(2bx + c) + (bx^2 + cx + d) \times 2] - 2 \times (bx^2 + cx + d) = 8x^2$ (après avoir divisé par e^{2x} qui est différent de 0),
   ssi $6bx + 3c + 6(bx^2 + cx + d) - 2(bx^2 + cx + d) = 8x^2$,
   ssi $6bx + 3c + 4(bx^2 + cx + d) = 8x^2$,
   ssi $4bx^2 + (6b + 4c)x + (3c + 4d) = 8x^2$.
   Par identification de polynômes, on a donc :

$$3y'_P - 2y_P = 8x^2\,\mathrm{e}^{2x} \quad \text{ssi} \quad \left\{\begin{array}{rcll} 4b & = & 8 & \leftarrow \text{ termes en } x^2 \\ 6b + 4c & = & 0 & \leftarrow \text{ termes en } x \\ 3c + 4d & = & 0 & \leftarrow \text{ termes constants} \end{array}\right.$$

$$\text{ssi} \quad \left\{\begin{array}{rcl} b & = & 2 \\ c & = & \frac{-6b}{4} = -3 \\ d & = & \frac{-3c}{4} = \frac{9}{4} \end{array}\right.$$

   D'où $y_P = (2x^2 - 3x + \frac{9}{4})\,\mathrm{e}^{2x}$.

   • Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} + \left(2x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right)\mathrm{e}^{2x}$$

   avec λ une constante réelle quelconque.

2. Détermination de l'unique solution y de l'équation différentielle (E), définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $y(0) = 2$.

Avec la question précédente, on a forcément :

$$y = \lambda\, \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} + \left(2x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) \mathrm{e}^{2x}$$

avec λ une constante réelle quelconque. Alors,

$$\begin{array}{rll} y\,(0) = \ 2 & \text{ssi} & \lambda\, \mathrm{e}^0 + \left(2 \times 0^2 - 3 \times 0 + \frac{9}{4}\right) \mathrm{e}^0 = 2 \\ & \text{ssi} & \lambda + \frac{9}{4} = 2 \\ & \text{ssi} & \lambda = 2 - \frac{9}{4} \\ & \text{ssi} & \lambda = -\frac{1}{4} \end{array}$$

L'unique solution cherchée est donc la fonction définie par :

$$y = -\frac{1}{4}\, \mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} + \left(2x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) \mathrm{e}^{2x}$$

Exercice 2 ($\simeq 4,5$ points). Résolution sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ de l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ (2x+1)y' - 2y = 6x + 3.$$

Après avoir divisé par $2x+1$ (possible car $2x+1 \neq 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' - \frac{2}{2x+1} \times y = \frac{6x+3}{2x+1}.$$

Or $\dfrac{6x+3}{2x+1} = \dfrac{3(2x+1)}{2x+1} = 3$. Ainsi l'équation devient

$$y' - \frac{2}{2x+1} \times y = 3.$$

Cette dernière équation est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$ avec $a(x) = -\frac{2}{2x+1}$ et $f(x) = 3$.

- $a(x) = -\dfrac{2}{2x+1} = (-1) \times \dfrac{2}{2x+1}$ est de la forme $(-1) \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = 2x+1$ (et donc $u'(x) = 2$). Une primitive A sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ de la fonction a est donc définie par

$$A(x) = (-1) \times \ln|u(x)| = (-1) \times \ln|2x+1| = -\ln(2x+1)$$

puisque $2x+1 > 0$ pour tout réel $x \in \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Par conséquent

$$y_H = \lambda\, \mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\, \mathrm{e}^{\ln(2x+1)} = \lambda \times (2x+1)$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda \times (2x+1)$ avec λ une constante réelle.

- Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times (2x+1)$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times (2x+1) + \lambda(x) \times 2.$$

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$(2x+1)y_P' - 2y_P = 6x + 3,$$

c'est-à-dire

$$(2x+1)\left[\lambda'(x)\times(2x+1)+\lambda(x)\times 2\right]-2\times\lambda(x)\times(2x+1)=6x+3,$$

c'est-à-dire encore

$$(2x+1)^2\lambda'(x)+2(2x+1)\lambda(x)-2(2x+1)\lambda(x)=6x+3.$$

Autrement dit,

$$(2x+1)^2\lambda'(x)=6x+3,$$

ce qui donne

$$\lambda'(x)=\frac{6x+3}{(2x+1)^2}=\frac{3(2x+1)}{(2x+1)^2}=\frac{3}{2x+1}=\frac{3}{2}\times\frac{2}{2x+1}.$$

Comme $\frac{2}{2x+1}$ est de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=2x+1$ (et donc $u'(x)=2$), on peut prendre

$$\lambda(x)=\frac{3}{2}\times\ln|u(x)|=\frac{3}{2}\ln|2x+1|=\frac{3}{2}\ln(2x+1).$$

D'où

$$y_P=\lambda(x)\times(2x+1)=\frac{3}{2}(2x+1)\ln(2x+1).$$

- Conclusion : les solutions de (E) sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y=y_H+y_P=\lambda(2x+1)+\frac{3}{2}(2x+1)\ln(2x+1)=(2x+1)\left(\lambda+\frac{3}{2}\ln(2x+1)\right)$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 3 ($\simeq 5,5$ points). Résolution sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ xy'-3y=\frac{5x^5-3x^4}{1+4x^2}.$$

Après avoir divisé par x (possible car $x\neq 0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y'+\frac{-3}{x}\times y=\frac{5x^4-3x^3}{1+4x^2}.$$

Cette dernière équation est de la forme $y'+a(x)y=f(x)$ avec $a(x)=\frac{-3}{x}$ et $f(x)=\frac{5x^4-3x^3}{1+4x^2}$.

- $a(x)=\dfrac{-3}{x}=(-3)\times\dfrac{1}{x}$ est de la forme $(-3)\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x)=x$ (et donc $u'(x)=1$). Une primitive A sur $]0;+\infty[$ de la fonction a est donc définie par

$$A(x)=(-3)\times\ln|u(x)|=(-3)\times\ln|x|=-3\ln x$$

puisque $x>0$ pour tout réel $x\in]0;+\infty[$. Par conséquent

$$y_H=\lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)}=\lambda\,\mathrm{e}^{3\ln x}=\lambda\left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^3=\lambda x^3$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Solutions de l'équation homogène : $y_H=\lambda x^3$ avec λ une constante réelle.

• Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times x^3$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times x^3 + \lambda(x) \times 3x^2.$$

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$xy_P' - 3y_P = \frac{5x^5 - 3x^4}{1+4x^2},$$

c'est-à-dire

$$x\left[\lambda'(x) \times x^3 + \lambda(x) \times 3x^2\right] - 3 \times \lambda(x) \times x^3 = \frac{5x^5 - 3x^4}{1+4x^2},$$

c'est-à-dire encore

$$x^4\lambda'(x) + 3x^3\lambda(x) - 3x^3\lambda(x) = \frac{5x^5 - 3x^4}{1+4x^2}.$$

Autrement dit,

$$x^4\lambda'(x) = \frac{5x^5 - 3x^4}{1+4x^2} = \frac{x^4(5x-3)}{1+4x^2},$$

ce qui donne

$$\lambda'(x) = \frac{5x-3}{1+4x^2} = \frac{5x}{1+4x^2} - \frac{3}{1+4x^2}.$$

Or la première fraction $\dfrac{5x}{1+4x^2}$ est presque de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ dont une primitive est $\ln|u(x)|$. En prenant ici $u(x) = 1+4x^2$ (et donc $u'(x) = 8x$), on peut écrire

$$\frac{5x}{1+4x^2} = \frac{5}{8} \times \frac{8x}{1+4x^2}$$

dont une primitive est $\dfrac{5}{8} \times \ln|1+4x^2| = \dfrac{5}{8} \times \ln(1+4x^2)$. Dans ce qui précède, on a utilisé que $|1+4x^2| = 1+4x^2$ car $1+4x^2 > 0$ pour tout réel x.

D'autre part, la seconde fraction $\dfrac{3}{1+4x^2}$ est presque de la forme $\frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ dont une primitive est $\arctan(u(x))$. En prenant ici $u(x) = 2x$ (et donc $u'(x) = 2$), on peut écrire

$$\frac{3}{1+4x^2} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{1+(2x)^2}$$

dont une primitive est $\dfrac{3}{2} \times \arctan(2x)$.

Par conséquent, on peut prendre

$$\lambda(x) = \frac{5}{8} \times \ln(1+4x^2) - \frac{3}{2} \times \arctan(2x).$$

D'où

$$y_P = \lambda(x) \times x^3 = \frac{5x^3}{8} \times \ln(1+4x^2) - \frac{3x^3}{2} \times \arctan(2x).$$

• Conclusion : les solutions de (E) sur $]0;+\infty[$ sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda x^3 + \frac{5x^3}{8} \times \ln(1+4x^2) - \frac{3x^3}{2} \times \arctan(2x) = \left(\lambda + \frac{5}{8} \times \ln(1+4x^2) - \frac{3}{2} \times \arctan(2x)\right) \times x^3$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 4 ($\simeq 4,5$ points). On considère l'équation différentielle :

$$(E):\ 3y'' - y' - 4y = 10\cos x.$$

1. Résolution de l'équation homogène $(H):\ 3y'' - y' - 4y = 0$.
   Les solutions de l'équation caractéristique $3r^2 - r - 4 = 0$ sont $r_1 = -1$ et $r_2 = \frac{4}{3}$ (discriminant $\Delta = 7^2$).
   Donc $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-x} + \mu\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}x}$, où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

2. Cherchons une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $y_P = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$ où α et β sont des constantes réelles à déterminer.
   Alors, en dérivant, on obtient
   $$y_P' = -\alpha\sin(x) + \beta\cos(x).$$
   Puis, en dérivant y_P', on obtient
   $$y_P'' = -\alpha\cos(x) - \beta\sin(x).$$
   Ainsi y_P vérifie (E) si et seulement si $3y_P'' - y_P' - 4y_P = 10\cos(x)$,

   ssi $3\,(-\alpha\cos(x) - \beta\sin(x)) - (-\alpha\sin(x) + \beta\cos(x)) - 4\,(\alpha\cos(x) + \beta\sin(x)) = 10\cos(x)$,

   ssi $(-3\alpha - \beta - 4\alpha)\cos(x) + (-3\beta + \alpha - 4\beta)\sin(x) = 10\cos(x)$,

   ssi $(-7\alpha - \beta)\cos(x) + (\alpha - 7\beta)\sin(x) = 10\cos(x)$,

   ssi $\begin{cases} -7\alpha - \beta = 10 & \leftarrow \text{ termes en } \cos(x) \\ \alpha - 7\beta = 0 & \leftarrow \text{ termes en } \sin(x) \end{cases}$

   La deuxième équation du système permet d'écrire $\alpha = 7\beta$. On remplace α par 7β dans la première équation, ce qui donne $-7(7\beta) - \beta = 10$. Ainsi $-50\beta = 10$ puis $\beta = -\dfrac{10}{50} = -\dfrac{1}{5}$.
   Par conséquent $\alpha = 7\beta = -\dfrac{7}{5}$.
   D'où $y_P = -\dfrac{7}{5}\cos(x) - \dfrac{1}{5}\sin(x)$.

3. On déduit des questions précédentes que toutes les solutions de (E) sont données par
   $$y = y_H + y_P = \lambda\,\mathrm{e}^{-x} + \mu\,\mathrm{e}^{\frac{4}{3}x} - \frac{7}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x)$$
   où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

Fin du corrigé.