Exercice 1 ($\simeq 10$ points).

1. On considère le polynôme B défini par :

$$B(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x.$$

a) $B(-1) = 1 + 1 - 5 + 3 = 0$.

b) On peut déjà commencer à factoriser : $B(x) = x(x^3 - x^2 - 5x - 3)$.
Ensuite, d'après la question précédente, -1 est une racine de B. Donc $x+1$ divise $B(x)$, et donc forcément $x+1$ divise $x^3 - x^2 - 5x - 3$.
On effectue la division euclidienne de $x^3 - x^2 - 5x - 3$ par $x+1$ pour factoriser $B(x)$. Après calculs (à faire évidemment sur sa copie), on obtient pour quotient $x^2 - 2x - 3$ et pour reste 0 ; autrement dit :

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x+1) \times (x^2 - 2x - 3).$$

Le discriminant du trinôme du second degré $x^2 - 2x - 3$ étant égal à 16, on trouve pour racines de $x^2 - 2x - 3$ les nombres -1 et 3 ; on peut en déduire que $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$.
Donc

$$B(x) = x(x^3 - x^2 - 5x - 3) = x(x+1)(x^2 - 2x - 3) = x(x+1)(x+1)(x-3) = x(x-3)(x+1)^2$$

ce qui est bien la factorisation de $B(x)$ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fraction rationnelle F définie par

$$F(x) = \frac{2x^5 + x^4 - 11x^3 - 21x^2 - 13x + 6}{x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x} \cdot$$

a) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle F.
Le degré de F est positif ou nul car égal à $5 - 4 = 1$. On doit donc effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur. Après calculs (à faire évidemment sur sa copie), on obtient pour quotient $2x + 3$ et pour reste $2x^3 - 4x + 6$; autrement dit :

$$2x^5 + x^4 - 11x^3 - 21x^2 - 13x + 6 = (2x+3) \times (x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x) + 2x^3 - 4x + 6.$$

Ainsi

$$F(x) = 2x + 3 + \frac{2x^3 - 4x + 6}{x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x} \cdot$$

On peut donc écrire :

$$F(x) = 2x + 3 + \frac{2x^3 - 4x + 6}{x^4 - x^3 - 5x^2 - 3x} = 2x + 3 + \frac{2x^3 - 4x + 6}{x(x-3)(x+1)^2} \cdot$$

$$F(x) = 2x + 3 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2},$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles.

Notons $(*)$ l'égalité suivante :

$$\frac{2x^3 - 4x + 6}{x(x-3)(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}.$$

Pour trouver a, on multiplie l'égalité $(*)$ par x :

$$\frac{2x^3-4x+6}{(x-3)(x+1)^2} = a + \frac{bx}{x-3} + \frac{cx}{x+1} + \frac{dx}{(x+1)^2},$$

et on évalue cette nouvelle égalité en $x := 0$ pour obtenir $a = \dfrac{6}{-3} = -2$.

Pour trouver b, on multiplie l'égalité $(*)$ par $x-3$:

$$\frac{2x^3-4x+6}{x(x+1)^2} = \frac{a(x-3)}{x} + b + \frac{c(x-3)}{x+1} + \frac{d(x-3)}{(x+1)^2},$$

et on évalue cette nouvelle égalité en $x := 3$ pour obtenir

$$b = \frac{2\times 27 - 12 + 6}{3\times 4^2} = \frac{48}{3\times 4^2} = \frac{4\times 4\times 3}{3\times 4^2} = 1.$$

Pour trouver d, on multiplie l'égalité $(*)$ par $(x+1)^2$:

$$\frac{2x^3-4x+6}{x(x-3)} = \frac{a(x+1)^2}{x} + \frac{b(x+1)^2}{x-3} + c(x+1) + d,$$

et on évalue cette nouvelle égalité en $x := -1$ pour obtenir $d = \dfrac{-2+4+6}{(-1)\times(-4)} = \dfrac{8}{4} = 2$.

L'égalité $(*)$ s'écrit donc maintenant :

$$\frac{2x^3-4x+6}{x(x-3)(x+1)^2} = -\frac{2}{x} + \frac{1}{x-3} + \frac{c}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Pour trouver c, on évalue l'égalité $(*)$ en $x := 1$ pour obtenir $\dfrac{2-4+6}{-2\times 4} = -2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{c}{2} + \dfrac{2}{4}$. Cela donne $-\dfrac{1}{2} = -2 + \dfrac{c}{2}$. D'où $\dfrac{c}{2} = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$ ce qui nous permet d'obtenir $c = 3$.

Remarque. Pour trouver c, on aurait aussi pu multiplier l'égalité $(*)$ par x puis prendre la limite quand x tend vers $+\infty$. Cela aurait donné $2 = -2 + 1 + c + 0$. Ainsi $c = 3$.

Finalement

$$F(x) = 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x-3} + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

b) Calcul de l'intégrale

$$I = \int_1^2 F(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2x^5+x^4-11x^3-21x^2-13x+6}{x^4-x^3-5x^2-3x}\,\mathrm{d}x\,.$$

$$I = \int_1^2 \left(2x+3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x-3}+\frac{3}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$I = \left[x^2+3x-2\ln|x|+\ln|x-3|+3\ln|x+1|-\frac{2}{x+1}\right]_1^2$$

$$I = 4+6-2\ln 2+0+3\ln 3-\frac{2}{3}-1-3+0-\ln 2-3\ln 2+1$$

$$I = 3\ln 3 - 6\ln 2 + \frac{19}{3}$$

Exercice 2 ($\simeq 10$ points). On considère la fraction rationnelle F définie par

$$F(x) = \frac{-10}{(x+1)(x^2-2x+2)}\,.$$

1. Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationnelle F.
   Le degré de F est négatif strict car égal à $0-3=-3$. Donc pas de division euclidienne à effectuer.

   Il s'agit maintenant de factoriser au maximum le dénominateur $B(x) = (x+1)(x^2-2x+2)$. Pour le trinôme du second degré x^2-2x+2, son discriminant vaut $-4<0$ et donc ce trinôme du second degré est un facteur irréductible sur $\mathbb{R}$. Ainsi $B(x) = (x+1)(x^2-2x+2)$ est la factorisation maximale sur $\mathbb{R}$.

   On peut donc écrire

$$F(x) = \frac{-10}{(x+1)(x^2-2x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-2x+2}$$

   où a, b, c sont des constantes réelles.

   Notons $(*)$ l'égalité suivante :

$$\frac{-10}{(x+1)(x^2-2x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-2x+2}$$

   Pour trouver a, on multiplie l'égalité $(*)$ par $x+1$:

$$\frac{-10}{(x^2-2x+2)} = a + \frac{(bx+c)(x+1)}{x^2-2x+2},$$

   et on évalue cette nouvelle égalité en $x := -1$ pour obtenir $a = \dfrac{-10}{5} = -2$.

   Pour trouver c, on évalue l'égalité $(*)$ en $x := 0$ pour obtenir $\dfrac{-10}{2} = a + \dfrac{c}{2}$. En multipliant par 2, cela donne $-10 = 2a + c$. D'où $c = -10 - 2a = -10 + 4 = -6$.

   Pour trouver b, on multiplie l'égalité $(*)$ par x puis on prend la limite quand x tend vers $+\infty$. Cela permet d'obtenir $0 = a + b$. Ainsi $b = -a = 2$.

   Finalement

$$F(x) = \frac{-10}{(x+1)(x^2-2x+2)} = -\frac{2}{x+1} + \frac{2x-6}{x^2-2x+2}$$

2. Calcul de l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\arctan(x-1)}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \arctan(x-1) \times \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Par IPP : on pose $u(x) = \arctan(x-1)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
   Tout d'abord, comme $u = \arctan w$ avec $w(x) = x-1$ (et donc $w'(x) = 1$), on obtient

$$u'(x) = \frac{w'(x)}{(w(x))^2+1} = \frac{1}{(x-1)^2+1} = \frac{1}{x^2-2x+1+1} = \frac{1}{x^2-2x+2}$$

   De plus, comme $v' = \dfrac{h'}{h^2}$ avec $h(x) = x+1$ (et donc $h'(x) = 1$), on prend

$$v(x) = -\frac{1}{h(x)} = -\frac{1}{x+1}$$

D'où, en appliquant la formule d'IPP $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$, on obtient :

$$I = \left[-\frac{1}{x+1}\arctan(x-1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-1}{x+1} \times \frac{1}{x^2-2x+2}\,\mathrm{d}x$$

Ainsi

$$I = -\frac{1}{2}\arctan(0) + \arctan(-1) - \frac{1}{10} \times \int_0^1 \frac{-10}{(x+1)(x^2-2x+2)}\,\mathrm{d}x$$

Or $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(-1) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$. Donc

$$I = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10} \times \int_0^1 \frac{-10}{(x+1)(x^2-2x+2)}\,\mathrm{d}x$$

Maintenant, avec les notations de la question 1,

$$I = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10} \times \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi :

$$I = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10} \times \int_0^1 \left(-\frac{2}{x+1} + \frac{2x-6}{x^2-2x+2}\right)\mathrm{d}x.$$

Comme la dérivée de x^2-2x+2 est égale à $2x-2$, on va écrire $2x-6 = 2x-2-4$, ce qui donne :

$$I = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10} \times \int_0^1 \left(-2 \times \frac{1}{x+1} + \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - 4 \times \frac{1}{x^2-2x+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$I = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10} \times \int_0^1 \left(-2 \times \frac{1}{x+1} + \frac{2x-2}{x^2-2x+2} - 4 \times \frac{1}{(x-1)^2+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$I = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10} \times \left[-2\ln|x+1| + \ln|x^2-2x+2| - 4\arctan(x-1)\right]_0^1.$$

$$I = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10} \times \left(-2\ln 2 + 0 - 4 \times 0 + 0 - \ln 2 + 4 \times \arctan(-1)\right)$$

$$I = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10} \times \left(-3\ln 2 + 4 \times \frac{-\pi}{4}\right)$$

$$I = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{10} \times (-3\ln 2 - \pi)$$

D'où

$$I = -\frac{\pi}{4} + \frac{3\ln 2}{10} + \frac{\pi}{10}$$

Finalement

$$I = \frac{3\ln 2}{10} + \frac{(-5+2)\pi}{20} = \frac{3\ln 2}{10} - \frac{3\pi}{20}$$

Fin du corrigé