

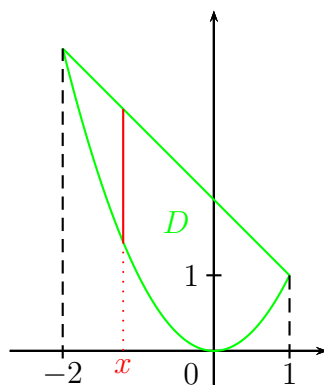
Exercice 1 ($\simeq 3,75$ points). Considérons D le domaine du plan défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y \leq 2 - x\}.$$

1. La condition $x^2 \leq y$ signifie que les points de D sont au-dessus de la parabole d'équation $y = x^2$. La condition $y \leq 2 - x$ signifie que les points de D sont en dessous de la droite $y = 2 - x$.

Il s'agit maintenant de déterminer les points d'intersection de la droite et de la parabole en résolvant l'équation $x^2 = 2 - x$. On obtient alors $x^2 + x - 2 = 0$; on calcule le discriminant Δ et on trouve les abscisses $x = -2$ et $x = 1$.

Ainsi D est le domaine :



2.

$$I = \iint_D 30y \, dx \, dy = \int_{-2}^1 \left(\int_{x^2}^{2-x} 30y \, dy \right) dx = \int_{-2}^1 \left([15y^2]_{x^2}^{2-x} \right) dx = 15 \times \int_{-2}^1 ((2-x)^2 - x^4) \, dx$$

Pour intégrer $(2-x)^2$ on peut soit le développer en $4 - 4x + x^2$, soit appliquer la formule $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 2 - x$ (et dans ce cas $u'(x) = -1$). On obtient alors :

$$I = 15 \times \left[-\frac{(2-x)^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^1 = [-5(2-x)^3 - 3x^5]_{-2}^1 = -5 - 3 + 5 \times 4^3 - 3 \times 2^5$$

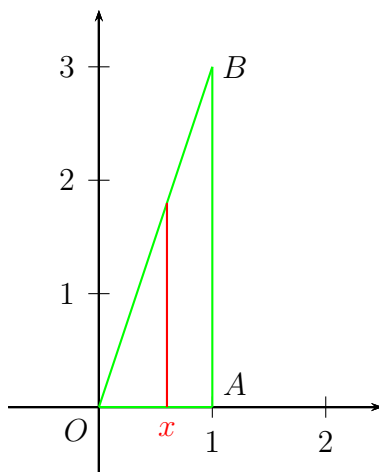
$$I = -5 - 3 + 320 - 96 = 320 - 4 - 4 - 96 = 320 - 4 - 100 = 220 - 4 = 216.$$

Exercice 2 ($\simeq 3,75$ points). Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, on considère les deux points dont les coordonnées sont les suivantes :

$$A(1;0) \quad ; \quad B(1;3).$$

On note D l'intérieur du triangle OAB .

1. D est l'intérieur du triangle vert ci-dessous :



2. Remarquons pour commencer que l'équation de la droite (OB) est $y = 3x$. Ainsi

$$J = \iint_D 4x^2 e^{2xy} dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{3x} 4x^2 e^{2xy} dy \right) dx$$

Comme une primitive de $u' e^u$ est e^u , on obtient ici en prenant $u(y) = 2xy$ (et donc $u'(y) = 2x$) :

$$J = \int_0^1 \left(\int_0^{3x} 2x \times 2x e^{2xy} dy \right) dx = \int_0^1 \left(2x \times \int_0^{3x} 2x e^{2xy} dy \right) dx$$

$$J = \int_0^1 \left(2x \times [e^{2xy}]_0^{3x} \right) dx = \int_0^1 \left(2x \times (e^{6x^2} - 1) \right) dx$$

$$J = \int_0^1 \left(2x e^{6x^2} - 2x \right) dx = \int_0^1 2x e^{6x^2} dx - \int_0^1 2x dx$$

Comme une primitive de $u' e^u$ est e^u , on obtient ici en prenant $u(x) = 6x^2$ (et donc $u'(x) = 12x$) :

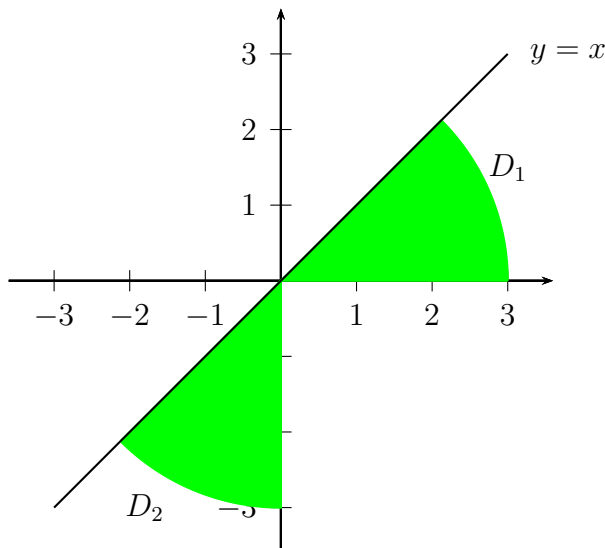
$$J = \int_0^1 \frac{1}{6} \times 6 \times 2x e^{6x^2} dx - \int_0^1 2x dx = \frac{1}{6} \times \int_0^1 12x e^{6x^2} dx - \int_0^1 2x dx$$

$$J = \frac{1}{6} \times [e^{6x^2}]_0^1 - [x^2]_0^1 = \frac{1}{6} \times (e^6 - 1) - 1 = \frac{e^6 - 7}{6}$$

Exercice 3 ($\simeq 4$ points). Considérons D le domaine du plan défini par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq x ; xy \geq 0 ; x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

1. La condition $x^2 + y^2 \leq 9$, qui s'écrit aussi $x^2 + y^2 \leq 3^2$, signifie que les points de D sont situés à l'intérieur du cercle de centre l'origine du repère et de rayon 3. La condition $y \leq x$ signifie que les points de D sont situés sous la droite d'équation $y = x$. Enfin la condition $xy \geq 0$ signifie que x et y sont de même signe : ou bien tous les deux positifs, ou bien tous les deux négatifs. Autrement dit, $xy \geq 0$ pour tous les points situés dans le quart supérieur droit du repère et pour tous les points situés dans le quart inférieur gauche du repère. Donc D est le domaine vert ci-dessous :



2. Notons D_1 la partie de D située au-dessus de l'axe des abscisses, et D_2 la partie de D située en dessous de l'axe des abscisses. Ainsi

$$K = \iint_D (2x + 4y) \, dx \, dy = \iint_{D_1} (2x + 4y) \, dx \, dy + \iint_{D_2} (2x + 4y) \, dx \, dy.$$

Commençons par le calcul de

$$K_1 = \iint_{D_1} (2x + 4y) \, dx \, dy.$$

On va calculer K_1 en passant aux coordonnées polaires. On a alors

$$K_1 = \iint_{\Delta_1} (2r \cos \theta + 4r \sin \theta) \times r \, dr \, d\theta$$

où

$$\Delta_1 = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq r \leq 3; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \iint_{\Delta_1} r^2(2 \cos \theta + 4 \sin \theta) \, dr \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^3 r^2(2 \cos \theta + 4 \sin \theta) \, dr \right) d\theta \\ K_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos \theta + 4 \sin \theta) \times \left(\int_0^3 r^2 \, dr \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos \theta + 4 \sin \theta) \times \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^3 d\theta \\ K_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos \theta + 4 \sin \theta) \times 9 \, d\theta = 9 \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos \theta + 4 \sin \theta) \, d\theta \end{aligned}$$

$$K_1 = 9 \times [2 \sin \theta - 4 \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$K_1 = 9 \times (\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 0 + 4) = 9(4 - \sqrt{2}).$$

Maintenant pour le calcul de $K_2 = \iint_{D_2} (2x + 4y) \, dx \, dy$, on procède exactement de la même façon : seules les bornes en θ vont changer. On obtient alors :

$$K_2 = 9 \times [2 \sin \theta - 4 \cos \theta]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$K_2 = 9 \times [(2 \times (-1) - 0) - (-\sqrt{2} - (-2\sqrt{2}))] = 9(-2 - \sqrt{2}).$$

Finalement,

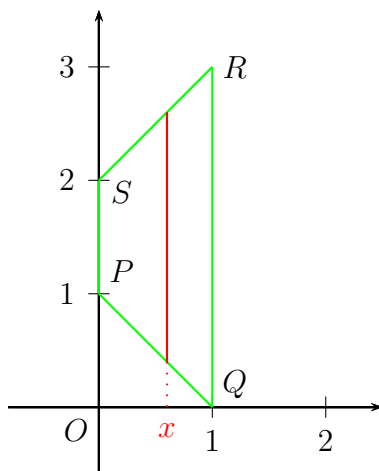
$$K = K_1 + K_2 = 9(4 - \sqrt{2}) + 9(-2 - \sqrt{2}) = 9(2 - 2\sqrt{2}) = 18(1 - \sqrt{2}).$$

Exercice 4 ($\simeq 4$ points). Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, on considère les quatre points dont les coordonnées sont les suivantes :

$$P(0;1) \quad ; \quad Q(1;0) \quad ; \quad R(1;3) \quad ; \quad S(0;2).$$

On note D l'intérieur du quadrilatère $PQRS$.

1. D est l'intérieur du quadrilatère vert ci-dessous :



2. Remarquons pour commencer que l'équation de la droite (PQ) est $y = 1 - x$ et que l'équation de la droite (SR) est $y = 2 + x$. Ainsi

$$L = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dx dy = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{2+x} \frac{1}{\sqrt{1+3x}} dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+3x}} \times \int_{1-x}^{2+x} dy \right) dx$$

$$L = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+3x}} \times [y]_{1-x}^{2+x} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+3x}} \times ((2+x) - (1-x)) \right) dx$$

$$L = \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{1+3x}} \times (1+2x) \right) dx$$

Calculons cette dernière intégrale en intégrant par parties : posons $u(x) = 1 + 2x$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3x}}$. Ainsi $u'(x) = 2$. De plus, on sait qu'une primitive de $\frac{w'}{\sqrt{w}}$ est $2\sqrt{w}$; en prenant ici $w(x) = 1 + 3x$, et donc $w'(x) = 3$, on peut écrire

$$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+3x}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{\sqrt{1+3x}}$$

ce qui permet de prendre

$$v(x) = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{1+3x} = \frac{2}{3}\sqrt{1+3x}.$$

La formule d'IPP $\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$ donne :

$$L = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+3x}} \times (1+2x) dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{1+3x} \times (1+2x) \right]_0^1 - \int_0^1 2 \times \frac{2}{3}\sqrt{1+3x} dx$$

$$L = \frac{2}{3} \times 2 \times 3 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \int_0^1 \sqrt{1+3x} dx$$

Or $\int_0^1 \sqrt{1+3x} dx = \int_0^1 (1+3x)^{\frac{1}{2}} dx$.

En appliquant la formule de la primitive de $u'u^\alpha$ avec $u(x) = 1 + 3x$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ (et dans ce cas $u'(x) = 3$), on obtient alors :

$$\int_0^1 \sqrt{1+3x} \, dx = \frac{1}{3} \times \int_0^1 3 \times (1+3x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \frac{1}{3} \times \left[\frac{(1+3x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \left[(1+3x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+3x} \, dx = \frac{2}{9} \times \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right)$$

Or $4^{\frac{3}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$ et $1^{\frac{3}{2}} = 1$. D'où

$$\int_0^1 \sqrt{1+3x} \, dx = \frac{2}{9} \times (8 - 1) = \frac{14}{9}$$

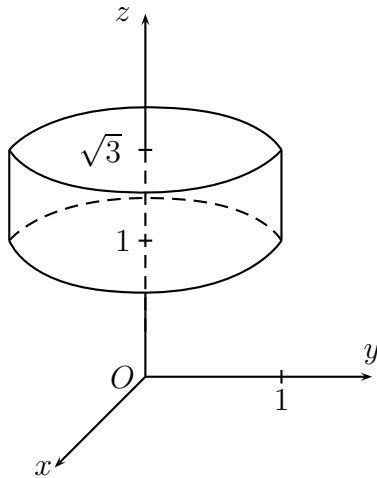
Finalemet

$$L = \frac{2}{3} \times 2 \times 3 - \frac{2}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{14}{9} = \frac{12-2}{3} - \frac{56}{27} = \frac{10}{3} - \frac{56}{27} = \frac{90}{27} - \frac{56}{27} = \frac{34}{27}$$

Exercice 5 ($\simeq 4,5$ points). Considérons le domaine Ω défini par :

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1; 1 \leq z \leq \sqrt{3} \right\}.$$

Ω est donc la région de l'espace correspondant à l'ensemble des points situés à l'intérieur du cylindre représenté (de façon approximative) ci-dessous :



Calcul de $M = \iiint_{\Omega} \frac{z+1}{(x^2+y^2+z^2)^2} dx dy dz$. On va effectuer une sommation par tranches.

$$M = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\iint_{D_z} \frac{z+1}{(x^2+y^2+z^2)^2} dx dy \right) dz$$

où D_z est le domaine obtenu lorsqu'on coupe le cylindre par le plan horizontal de cote z . Le domaine D_z est donc un disque de rayon 1.

Notons

$$N = \iint_{D_z} \frac{z+1}{(x^2+y^2+z^2)^2} dx dy.$$

Pour calculer N , on passe en coordonnées polaires :

$$N = \iint_{\Delta_z} \frac{(z+1) \times r}{(r^2+z^2)^2} dr d\theta = (z+1) \times \iint_{\Delta_z} \frac{r}{(r^2+z^2)^2} dr d\theta$$

où

$$\Delta_z = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} N &= (z+1) \times \left(\int_0^1 \frac{r}{(r^2+z^2)^2} dr \right) \times \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ N &= 2\pi(z+1) \times \left(\int_0^1 \frac{r}{(r^2+z^2)^2} dr \right) = \pi(z+1) \times \left(\int_0^1 \frac{2r}{(r^2+z^2)^2} dr \right). \end{aligned}$$

Or $\frac{2r}{(r^2+z^2)^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(r) = r^2 + z^2$ et donc $u'(r) = 2r$. Donc

$$N = \pi(z+1) \times \left(\left[\frac{-1}{r^2+z^2} \right]_0^1 \right) = \pi(z+1) \times \left(\frac{-1}{1+z^2} + \frac{1}{z^2} \right) = \pi \times \left(-\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{z^2} \right).$$

Alors

$$M = \int_1^{\sqrt{3}} \pi \times \left(-\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{z^2} \right) dz$$

$$M = \pi \times \int_1^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2} \times \frac{2z}{1+z^2} + \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{z^2} \right) dz$$

Or $\frac{2z}{1+z^2}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(z) = 1+z^2$ et donc $u'(z) = 2z$. De plus, $\frac{1}{1+z^2}$ est de la forme $\frac{w'}{1+w^2}$ avec $w(z) = z$ et donc $w'(z) = 1$. D'où

$$M = \pi \times \left[-\frac{1}{2} \ln(1+z^2) + \ln(z) - \arctan z - \frac{1}{z} \right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$M = \pi \times \left(-\frac{1}{2} \ln 4 + \ln(\sqrt{3}) - \arctan \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln 2 - 0 + \arctan 1 + 1 \right).$$

$$M = \pi \times \left(-\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} + 1 \right).$$

Finalement

$$M = \pi \times \left(-\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 \right).$$

FIN DU CORRIGÉ