Attention ! Ci-dessous en noir la correction du devoir, et en bleu mes commentaires pour montrer que les arguments ou raisonnements vus en TD permettaient largement de répondre aux questions du devoir...

Exercice 1 ($\simeq 10$ points).

- Calcul de $A = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2-2}{\sqrt{x^3-6x+4}}\,\mathrm{d}x$:

On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

En posant ici $u(x) = x^3-6x+4$, on a donc $u'(x) = 3x^2-6 = 3(x^2-2)$ et on peut écrire en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$A = \frac{1}{3} \times \int_{-1}^{0} \frac{3(x^2-2)}{\sqrt{x^3-6x+4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \left[2\sqrt{x^3-6x+4}\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{3} \times \left[\sqrt{x^3-6x+4}\right]_{-1}^{0}.$$

D'où

$$A = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{4}-\sqrt{9}\right) = \frac{2}{3} \times (2-3) = -\frac{2}{3}.$$

Commentaire : A du même type que I_2 et I_4 dans l'exercice 1 de la feuille n° 1 de TD.

- Calcul de $B = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$:

On sait que $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$.

En prenant $a = x$ et $b = 3x$, on obtient : $\sin(x)\cos(3x) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(4x)+\sin(-2x)\right)$.

Puis, comme sinus est une fonction impaire, on trouve : $\sin(x)\cos(3x) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(4x)-\sin(2x)\right)$.

Ainsi, par linéarité,

$$B = \frac{1}{2}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(4x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Or une primitive de $u'\sin u$ est $-\cos u$. En prenant d'abord $u(x) = 4x$ (et donc $u'(x) = 4$), puis ensuite $u(x) = 2x$ (et donc $u'(x) = 2$), on obtient :

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} \times \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin(4x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \times \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin(2x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} \times \left[-\cos(4x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \times \left[-\cos(2x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right).$$

D'où

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} \times \left[-\cos(2\pi)+\cos 0\right] - \frac{1}{2} \times \left[-\cos\pi+\cos 0\right]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} \times [-1+1] - \frac{1}{2} \times [+1+1]\right).$$

Finalement

$$B = \frac{1}{2} \times (0-1) = -\frac{1}{2}.$$

Commentaire : B du même type que I_4 dans l'exercice 4 de la feuille n° 1 de TD.

- Calcul de $C = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x$:

$$C = \int_0^2 \sqrt{4x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Or une primitive de $u'u^{\alpha}$, avec $\alpha \neq -1$, est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
Ici on pose $\alpha = \frac{1}{2}$ et $u(x) = 4x+1$. Donc $u'(x) = 4$ et, par linéarité, on peut écrire :

$$C = \frac{1}{4} \times \int_0^2 4 \times (4x+1)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi on obtient :

$$C = \frac{1}{4} \times \left[\frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \left(9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right).$$

Or $9^{\frac{3}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(\sqrt{9}\right)^3 = 3^3 = 27$. De même, $1^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{1}\right)^3 = 1^3 = 1$.
Conclusion.

$$C = \frac{1}{6} \times (27-1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

Commentaire : C du même type que I_5 dans l'exercice 1 de la feuille n° 1 de TD.

- Calcul de $D = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x}{1+16x^4}\,\mathrm{d}x$:

On commence par écrire : $D = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x}{1+(4x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$

On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{1+u^2}$ est $\arctan(u)$.

Dans le but d'utiliser cette primitive, on pose $u(x) = 4x^2$. Donc $u'(x) = 8x$ et, par linéarité, on peut écrire :

$$D = \frac{5}{8} \times \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x}{1+(4x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

On obtient alors :

$$D = \frac{5}{8} \times \left[\arctan\left(4x^2\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{8} \times \left[\arctan(1) - \arctan(0)\right].$$

Finalement,

$$D = \frac{5}{8} \times \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{5\pi}{32}.$$

Commentaire : D du même type que A dans l'exercice 2 de la feuille n° 1 de TD ; c'est aussi une intégrale qui ressemblait à la D de l'exercice 1 de l'énoncé du devoir de l'an passé.

Exercice 2 ($\simeq 4,5$ points). Calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \left(2x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

On sait que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Donc $\left(2x - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 = 4x^2 - 4x\,\mathrm{e}^{-x} + \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2$.
On sait également que $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{ab}$. Donc $\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \mathrm{e}^{-2x}$.
Par conséquent, $I = \displaystyle\int_0^1 \left(4x^2 - 4x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}\right) \mathrm{d}x$.
Par linéarité, $I = 4 \times \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - 4 \times \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$.
Traitons ces 3 intégrales séparément :

- $\displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$.
- Pour $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, on va appliquer la formule d'IPP :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x} = (-1) \times (-\mathrm{e}^{-x})$. Alors $u'(x) = 1$ et, puisqu'une primitive de $w'\,\mathrm{e}^w$ est e^w, on prend $v(x) = (-1) \times \mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}$ en ayant pris $w(x) = -x$. La formule d'IPP donne alors :

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x.$$

D'où

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} + 0 - \int_0^1 (-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} - \left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1.$$

Finalement

$$\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-1} - \left(\mathrm{e}^{-1} - 1\right) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

- Enfin, puisqu'une primitive de $w'\,\mathrm{e}^w$ est e^w, on obtient en prenant $w(x) = -2x$:

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2} \times \int_0^1 (-2)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2} \times \left[\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 = \frac{-1}{2} \times \left(\mathrm{e}^{-2} - 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}.$$

Conclusion.

$$I = 4 \times \frac{1}{3} - 4 \times (1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}.$$

Ainsi

$$I = \frac{4}{3} - 4 + \frac{1}{2} + 8\,\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2} = -\frac{13}{6} + 8\,\mathrm{e}^{-1} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2}.$$

Commentaire : I d'abord du même type que exercice 5 de la feuille n° 1 de TD (pour l'identité remarquable) ; puis $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 \mathrm{d}x$ du même type que B et C dans exercice 2 de la feuille n° 2 de TD.

Exercice 3 ($\simeq 5,5$ points). À l'aide du changement de variable $t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$, calcul de l'intégrale :

$$J = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Remarquons d'abord que $x \in \left[0;\sqrt{3}\right]$. Ainsi $\dfrac{x}{2} \in [-1;1]$.
Par conséquent, puisque $t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$, on a $\sin t = \sin\left(\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \dfrac{x}{2}$.
Cela permet d'obtenir $x = 2\sin t$.

Passons maintenant aux différentes étapes pour effectuer le changement de variable proposé :

- Bornes : si $x = 0$ alors $t = \arcsin(0) = 0$. De même si $x = \sqrt{3}$ alors $t = \arcsin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

- Fonction : comme on a vu au début que $x = 2\sin t$, on obtient :

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{(2\sin t)^2}{\sqrt{4-(2\sin t)^2}} = \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4(1-\sin^2 t)}}.$$

Mais on sait que, pour tout réel t, on a $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Donc $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$. Alors

$$\sqrt{4(1-\sin^2 t)} = \sqrt{4\cos^2 t} = 2\cos t,$$

la dernière égalité étant exacte car ici $\cos t > 0$ (puisque $t \in [0; \frac{\pi}{3}]$).

On a donc

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4\sin^2 t}{2\cos t}.$$

- Différentielle : on a $x = 2\sin t$. En dérivant par rapport à t, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\cos t$.
On en déduit que $\mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

- Conclusion. On applique la formule de changement de variable :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\sin^2 t}{2\cos t} \times 2\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

On sait (formulaire de trigo) que $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$. On en déduit que $2\sin^2 t = 1 - \cos(2t)$.

Remarque. On aurait aussi pu utiliser la formule de trigo donnant $\sin a \sin b$ *pour gérer le* $\sin^2 t$.

Peu importe la méthode suivie, on obtient alors :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \times 2\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2(1-\cos(2t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 - 2\cos(2t))\,\mathrm{d}t.$$

D'où

$$I = [2t - \sin(2t)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3} - \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 0 + \sin 0.$$

Par ailleurs, par lecture sur le cercle trigo, on a $\sin 0 = 0$ et $\sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Finalement,

$$I = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Commentaire : J concerne un changement de variable comme les nombreux exemples vus dans l'exercice 3 de la feuille n° 2 de TD. La nouvelle intégrale qu'on obtient se calcule comme I_3 dans exercice 4 de la feuille n° 1 de TD ou comme un morceau de l'intégrale intervenant dans exercice 5 de la feuille n° 1 de TD.

Fin du corrigé.