Attention ! Ci-dessous en noir la correction du devoir, et en bleu mes commentaires pour montrer que les arguments ou raisonnements vus en TD permettaient largement de répondre aux questions du devoir...

Exercice 1 ($\simeq$ 11 **points).**

- Calcul de $A = \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+3}\,\mathrm{d}x$:

On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

En posant ici $u(x) = x^3-3x^2+3$, on a donc $u'(x) = 3x^2-6x = 3(x^2-2x)$ et on peut écrire en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$A = \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3} \times \frac{3(x^2-2x)}{x^3-3x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \int_{-2}^{-1} \frac{3(x^2-2x)}{x^3-3x^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \left[\ln|x^3-3x^2+3|\right]_{-2}^{-1}.$$

Attention ! Ne pas oublier les valeurs absolues dans le logarithme.

D'où

$$A = \frac{1}{3} \times (\ln 1 - \ln(17)) = -\frac{\ln(17)}{3}.$$

Commentaire : A du même type que I_1 et I_4 dans l'exercice 1 de la feuille n° 1 de TD.

- Calcul de $B = \displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{5x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$:

On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $\dfrac{-1}{u}$.

En posant ici $u(x) = x^2+1$, on a donc $u'(x) = 2x$ et on peut écrire en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$B = \frac{5}{2} \times \int_{-2}^{1} \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2} \times \left[\frac{-1}{x^2+1}\right]_{-2}^{1}.$$

D'où

$$B = \frac{5}{2} \times \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{-5+2}{10} = -\frac{3}{4}.$$

Commentaire : B du même type que J_4 dans l'exercice 3 de la feuille n° 2 de TD, mais surtout application directe du tableau des primitives.

- Calcul de $C = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2 \mathrm{d}x$:

On sait que $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour tout réel t. On en déduit que $2\cos^2(t) = 1 + \cos(2t)$ puis que

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2} \times (1 + \cos(2t)).$$

Remarque. On aurait aussi pu obtenir cette dernière égalité en utilisant la formule de trigo $\cos(a)\cos(b)$ avec $a = b = t$.

Finalement, en prenant $t = \dfrac{x}{3}$, on obtient :

$$\left(\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} \times \left(1 + \cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right)$$

Ainsi, par linéarité,

$$C = \frac{1}{2} \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{2x}{3}\right) \mathrm{d}x\right).$$

Or une primitive de $u' \cos u$ est $\sin u$. En prenant $u(x) = \frac{2x}{3}$ (et donc $u'(x) = \frac{2}{3}$), on obtient :

$$C = \frac{1}{2}\left([x]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{3}{2} \times \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2}{3} \times \cos\left(\frac{2x}{3}\right) \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \times \left[\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right).$$

D'où

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \times \left[\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin(0)\right]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\right).$$

Conclusion.

$$C = \frac{\pi}{8} + \frac{3}{8} = \frac{\pi + 3}{8}.$$

Commentaire : C du même type que I_3 dans l'exercice 4 de la feuille n° 1 de TD.

- Calcul de $D = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{3x - 1}{\sqrt{1 - 4x^2}} \mathrm{d}x$:

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on commence par écrire :

$$D = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{3x}{\sqrt{1 - 4x^2}} \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{3x}{\sqrt{1 - 4x^2}} \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \mathrm{d}x$$

Pour la première intégrale, on pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 1 - 4x^2$, et donc $u'(x) = -8x$; pour la seconde intégrale, on pense à la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$ avec $u(x) = 2x$, et donc $u'(x) = 2$. Alors, encore par linéarité, on obtient :

$$D = \frac{3}{-8} \times \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{-8x}{\sqrt{1 - 4x^2}} \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \times \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2}{\sqrt{1 - (2x)^2}} \mathrm{d}x$$

D'où

$$D = -\frac{3}{8} \times \left[2\sqrt{1 - 4x^2}\right]_0^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} \times [\arcsin(2x)]_0^{\frac{1}{4}} = -\frac{3}{4} \times \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right] - \frac{1}{2} \times \left[\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0)\right].$$

Finalement,

$$D = -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{6} - 0\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{4} - \frac{\pi}{12}.$$

Commentaire : il fallait penser d'abord à séparer en deux comme pour D dans l'exercice 2 de la feuille n° 1 de TD ou comme pour J_5 dans l'exercice 3 de la feuille n° 2 de TD ; ensuite D du même type que I_2 et I_3 dans l'exercice 1 de la feuille n° 1 de TD.

Exercice 2 ($\simeq 4$ points). Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \left(7 - x\,\mathrm{e}^{3x}\right) \mathrm{d}x$.

Par linéarité, $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} 7\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{3}} x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$.

Traitons ces 2 intégrales séparément :

- $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} 7\,\mathrm{d}x = [7x]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{7}{3}$.
- Pour $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$, on va appliquer la formule d'IPP :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{3x} = \frac{1}{3} \times (3\,\mathrm{e}^{3x})$. Alors $u'(x) = 1$ et, puisqu'une primitive de $w'\,\mathrm{e}^{w}$ est e^{w}, on prend $v(x) = \frac{1}{3} \times \mathrm{e}^{3x}$ en ayant pris $w(x) = 3x$. La formule d'IPP donne alors :

$$\int_0^{\frac{1}{3}} x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x\,\mathrm{e}^{3x}\right]_0^{\frac{1}{3}} - \int_0^{\frac{1}{3}} 1 \times \frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x.$$

D'où

$$\int_0^{\frac{1}{3}} x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{9}\,\mathrm{e}^{1} - 0 - \frac{1}{3} \times \int_0^{\frac{1}{3}} \mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{9} - \frac{1}{3} \times \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{3x}\right]_0^{\frac{1}{3}}.$$

Finalement

$$\int_0^{\frac{1}{3}} x\,\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}}{9} - \frac{1}{9} \times (\mathrm{e} - 1) = \frac{1}{9}.$$

Conclusion.

$$I = \frac{7}{3} - \frac{1}{9} = \frac{21 - 1}{9} = \frac{20}{9}.$$

Commentaire : l'IPP du même type que B dans l'exercice 2 de la feuille n° 2 de TD. Intégrale également très proche de l'exemple fait en cours pour illustrer l'IPP.

Exercice 3 ($\simeq$ 5 points). À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{2x+1}$, calcul de l'intégrale :

$$J = \int_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{9}{(6x+4)\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

Remarquons d'abord que $t = \sqrt{2x+1}$ nous permet d'obtenir $t^2 = 2x+1$, puis $t^2 - 1 = 2x$, et enfin $x = \dfrac{t^2-1}{2} = \dfrac{1}{2}(t^2-1)$.

Passons maintenant aux différentes étapes pour effectuer le changement de variable proposé :

- Bornes : si $x = -\dfrac{1}{3}$ alors $t = \sqrt{2 \times \dfrac{-1}{3} + 1} = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. De même si $x = 0$ alors $t = \sqrt{1} = 1$.
- Fonction : comme on a à la fois $t = \sqrt{2x+1}$ et $x = \dfrac{t^2-1}{2}$, on obtient :

$$f(x) = \frac{9}{(6x+4)\sqrt{2x+1}} = \frac{9}{(6 \times \frac{t^2-1}{2} + 4)t} = \frac{9}{(3(t^2-1)+4)t} = \frac{9}{(3t^2-3+4)t} = \frac{9}{(3t^2+1)t}$$

- Différentielle : on a $x = \dfrac{1}{2}(t^2-1)$. En dérivant par rapport à t, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2} \times 2t = t$. On en déduit que $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$.

- Conclusion. On applique la formule de changement de variable :

$$J = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{9}{(3t^2+1)t} \times t\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{9}{3t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{9}{(t\sqrt{3})^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

On pense à la forme $\dfrac{u'}{u^2+1}$ avec $u(t) = t\sqrt{3}$, et donc $u'(t) = \sqrt{3}$. Alors, encore par linéarité, on obtient :

$$J = \frac{9}{\sqrt{3}} \times \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{\sqrt{3}}{(t\sqrt{3})^2+1}\,\mathrm{d}t$$

D'où

$$J = \frac{9}{\sqrt{3}} \times \Big[\arctan\left(t\sqrt{3}\right)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} = 3\sqrt{3} \times \Big[\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan(1)\Big]\,.$$

Remarque. Ici on a utilisé $\dfrac{9}{\sqrt{3}} = \dfrac{9 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \dfrac{9 \times \sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$.

Finalement,

$$J = 3\sqrt{3} \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{3} \times \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{3 \times 4} = \frac{\pi\sqrt{3}}{4}.$$

Commentaire : J concerne un changement de variable comme les nombreux exemples vus dans l'exercice 3 de la feuille n° 2 de TD ; ici très proche de J_1 et J_5 dans l'exercice 3 de la feuille n° 2 de TD. Pour ceux qui avaient eu le courage de refaire le devoir de 2016/17, J très très proche de l'exercice 3.

Fin du corrigé.