---

**Attention !** Ci-dessous en noir la correction du devoir, et en bleu mes commentaires pour montrer que les arguments ou raisonnements vus en TD permettaient largement de répondre aux questions du devoir...

---

**Exercice 1 ($\simeq 11,5$ points).**

- Calcul de $A = \displaystyle\int_0^4 \left(x - 3\,\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\right) \mathrm{d}x$ :

Par linéarité, $A = \displaystyle\int_0^4 x\,\mathrm{d}x - 3 \times \int_0^4 \mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\,\mathrm{d}x$.

On sait qu'une primitive de $u'\,\mathrm{e}^u$ est $\mathrm{e}^u$.

En posant ici $u(x) = \frac{x}{4} = \frac{1}{4} \times x$, on a donc $u'(x) = \frac{1}{4}$ et on peut écrire :

$$A = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 - 3 \times \int_0^4 4 \times \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\,\mathrm{d}x$$

puis en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$A = 8 - 0 - 3 \times 4 \times \int_0^4 \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\,\mathrm{d}x = 8 - 12 \times \left[\mathrm{e}^{\frac{x}{4}}\right]_0^4$$

D'où

$$A = 8 - 12(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^0) = 8 - 12(\mathrm{e} - 1) = 8 - 12\,\mathrm{e} + 12 = 20 - 12\,\mathrm{e}\,.$$

Commentaire : $A$ avec une fonction en exponentielle du même type que dans l'exercice 2 de la feuille n° 2 de TD, et surtout application directe du tableau des primitives.

- Calcul de $B = \displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{7\sin x}{(1 + 6\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$ :

On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $\dfrac{-1}{u}$.

En posant ici $u(x) = 1 + 6\cos x$, on a donc $u'(x) = -6\sin x$ et on peut écrire en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$B = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{7}{-6} \times \frac{-6\sin x}{(1 + 6\cos x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{-6} \times \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \frac{-6\sin x}{(1 + 6\cos x)^2}\,\mathrm{d}x$$

D'où

$$B = -\frac{7}{6} \times \left[\frac{-1}{1 + 6\cos x}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \frac{7}{6} \times \left[\frac{1}{1 + 6\cos x}\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}.$$

Attention ! Beaucoup d'erreurs de signe dans les copies car trop d'étudiants ne font pas l'effort d'écrire la formule $\dfrac{u'}{u^2}$ avec le détail de qui sont $u$ et $u'$ !!!

Or $\cos\pi = -1$ donc $1 + 6\cos\pi = 1 - 6 = -5$ ; de plus $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ donc $1 + 6\cos\frac{2\pi}{3} = 1 - 3 = -2$. Ainsi :

$$B = \frac{7}{6} \times \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3 \times 10} = \frac{7}{2 \times 10} = \frac{7}{20}.$$

Commentaire : $B$ du même type que dans l'exercice 1 de la feuille n° 1 de TD en exploitant les formules du tableau des primitives.

- Calcul de $C = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(5x)\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ : on transforme d'abord le produit $\sin(5x)\cos(2x)$ en somme grâce à la formule de trigo donnant $\sin(a) \times \cos(b)$ :

$$\sin(5x)\cos(2x) = \frac{1}{2} \times (\sin(7x) + \sin(3x)).$$

On obtient alors par linéarité :

$$C = \frac{1}{2} \times \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin(7x) + \sin(3x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{7} \times 7\sin(7x) + \frac{1}{3} \times 3\sin(3x)\right) \mathrm{d}x.$$

On sait qu'une primitive de $u' \sin u$ est $-\cos(u)$. D'où :

$$C = \frac{1}{2} \times \left[\frac{-\cos(7x)}{7} + \frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

Or $\cos\frac{7\pi}{3} = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. De plus, $\cos\frac{3\pi}{3} = \cos\pi = -1$ et $\cos 0 = 1$. On obtient alors :

$$C = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{14} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{-3 + 14 + 6 + 14}{42} = \frac{1}{2} \times \frac{31}{42} = \frac{31}{84}.$$

Commentaire : $C$ du même type que $I_4$ dans l'exercice 4 de la feuille n° 1 de TD.

- Calcul de $D = \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ :

Remarquons d'abord que $D = \int_1^4 \ln x \times \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. On va appliquer la formule d'IPP :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, on pose $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Alors $u'(x) = \frac{1}{x}$ et on prend $v(x) = 2\sqrt{x}$. La formule d'IPP donne alors :

$$D = \int_1^4 \ln x \times \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[\ln x \times 2\sqrt{x}\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{x} \times 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Or $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$. Donc $\frac{1}{x} \times \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ et par conséquent :

$$D = 4\ln 4 - 0 - 2 \times \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 8\ln 2 - 2 \times \left[2\sqrt{x}\right]_1^4.$$

Finalement

$$D = 8\ln 2 - 4(2-1) = 8\ln 2 - 4.$$

Commentaire : cette intégrale était plus délicate que les précédentes ; il fallait penser d'abord à écrire la fonction sous la forme d'un produit comme pour $I_6$ dans l'exercice 1 de la feuille n° 1 de TD puis effectuer une IPP comme à l'exercice 1 de la feuille n° 2 de TD. L'intégrale $D$ était aussi un clin d'oeil vers la fin de la vidéo « Intégrales sans bornes et IPP » dans laquelle était laissé en exercice le calcul de l'intégrale $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ; ceux qui avaient fait l'effort de regarder les vidéos et qui, ici, avaient même fait l'effort de réfléchir à cette question ont été récompensés...

**Exercice 2 ($\simeq 4$ points).** À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{2x-3}$, calcul de l'intégrale :

$$I = \int_2^{\frac{7}{2}} \left(x\sqrt{2x-3} - 2\right) \mathrm{d}x\ .$$

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{2x-3}$.
Donc $t^2 = 2x-3$, puis $2x = t^2+3$ et enfin $x = \dfrac{t^2+3}{2} = \dfrac{1}{2} \times (t^2+3)$.

Attention. Ci-dessus, beaucoup d'erreurs dans les copies parce que les étudiants veulent balancer $x$ en une ligne sans écrire les étapes intermédiaires. Je vois donc fleurir des expressions du genre $x = \dfrac{t^2-3}{2}$, ce qui plante toute la suite de l'exercice. Ce n'est pourtant pas faute d'avoir insisté en TD sur le fait de ne pas griller d'étapes et d'arrêter de faire tout de tête...

- Bornes. Lorsque $x = 2$, alors $t = \sqrt{4-3} = \sqrt{1} = 1$ et, lorsque $x = \frac{7}{2}$, alors $t = \sqrt{7-3} = \sqrt{4} = 2$.
- Fonction. On a
$$x\sqrt{2x-3} - 2 = \frac{1}{2} \times (t^2+3) \times t - 2.$$
- Différentielle. En dérivant l'égalité $x = \frac{1}{2} \times (t^2+3)$, on obtient $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \times 2t = t$, et donc $\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t$.
- Conclusion. En appliquant la formule de changement de variable,
$$I = \int_2^{\frac{7}{2}} \left(x\sqrt{2x-3} - 2\right) \times \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} \times (t^2+3) \times t - 2\right) \times t\,\mathrm{d}t$$

Attention. Ci-dessus, il est ESSENTIEL d'écrire les parenthèses de couleur rouge. Dans beaucoup de copies, j'ai vu des étudiants écrire dans l'intégrale :

$$\frac{1}{2} \times (t^2+3) \times t - 2\,t$$

ce qui fait qu'au calcul suivant ils ont intégré $\dfrac{1}{2} \times (t^2+3) \times t$ puis $2t$ au lieu d'intégrer $\dfrac{1}{2} \times (t^2+3) \times t \times t$ puis $2t$... Terrible erreur !

Ainsi
$$I = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} \times (t^2+3) \times t^2 - 2t\right) \mathrm{d}t = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} \times t^4 + \frac{3}{2} \times t^2 - 2t\right) \mathrm{d}t$$
$$I = \left[\frac{1}{2} \times \frac{t^5}{5} + \frac{1}{2} \times t^3 - t^2\right]_1^2$$

D'où
$$I = \frac{1}{2} \times \frac{32}{5} + 4 - 4 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{31}{10} + \frac{1}{2} = \frac{31+5}{10} = \frac{36}{10} = \frac{2 \times 18}{2 \times 5} = \frac{18}{5}.$$

Commentaire : $I$ du même type que $J_1$ dans l'exercice 3 de la feuille n° 2 de TD.

**Exercice 3 ($\simeq 4,5$ points).** Calculer l'intégrale :

$$J = \int_{-1}^{0} x^2 \arctan x \, \mathrm{d}x \; .$$

On va appliquer la formule d'IPP :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, on pose $u(x) = \arctan x$ et $v'(x) = x^2$. Alors $u'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ et on prend $v(x) = \frac{x^3}{3}$. La formule d'IPP donne alors :

$$J = \int_{-1}^{0} x^2 \arctan x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} \times \arctan x\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Par linéarité :

$$J = 0 - \frac{(-1)^3}{3} \times \arctan(-1) - \frac{1}{3} \times \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Or $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$. D'où

$$J = -\frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \times \int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Maintenant, dans le but de faire apparaitre le dénominateur $x^2+1$ au numérateur, on va transformer le numérateur : $x^3 = x \times x^2 = x(x^2 {\color{red}+1-1})$, ce qui donne :

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{x(x^2{\color{red}+1-1})}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x.$$

Donc

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \int_{-1}^{0} \left(2x - \frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \left[x^2 - \ln|x^2+1|\right]_{-1}^{0}$$

et finalement

$$\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times (0 - 0 - 1 + \ln 2) = \frac{\ln 2 - 1}{2}$$

Conclusion.

$$J = -\frac{\pi}{12} - \frac{1}{3} \times \frac{\ln 2 - 1}{2} = -\frac{\pi}{12} + \frac{1 - \ln 2}{6} = \frac{2 - 2\ln 2 - \pi}{12}$$

Commentaire : $J$ du même type que la question (b) dans l'exercice 1 de la feuille n° 2 de TD puis même raisonnement (le fameux « $+1-1$ ») déjà croisé à l'exercice 2 de la feuille n° 1 de TD.

**Fin du corrigé.**