Exercice 1. On considère m un nombre réel donné. On définit la matrice A_m de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$A_m = \begin{pmatrix} m-2 & 4-2m & m^2-6m+8 \\ 0 & 2m & 1 \\ 2-m & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Partie A ($\simeq 4,5$ points).

1.
$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} m-2 & 4-2m & m^2-6m+8 \\ 0 & 2m & 1 \\ 2-m & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

On effectue $L_3 := L_3 + L_1$:

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} m-2 & 4-2m & m^2-6m+8 \\ 0 & 2m & 1 \\ 0 & -2m & m^2-6m+7 \end{vmatrix}$$

Une fois qu'on a mis deux zéros sur C_1, on peut développer ce dernier déterminant par rapport à C_1 et continuer le calcul. Mais on peut être plus efficace ici, en effectuant $L_3 := L_3 + L_2$ (ce qui revient à dire qu'on aurait pu dès le début effectuer $L_3 := L_3 + L_2 + L_1$) :

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} m-2 & 4-2m & m^2-6m+8 \\ 0 & 2m & 1 \\ 0 & 0 & m^2-6m+8 \end{vmatrix}$$

On obtient un triangle de zéros sous la diagonale principale, ce qui permet de calculer directement le déterminant :

$$\det(A_m) = (m-2) \times 2m \times (m^2-6m+8) = 2m(m-2)(m^2-6m+8)$$

2. La matrice A_m est inversible si et seulement si $\det(A_m) \neq 0$.
Or, avec la question précédente, on a :
$\det(A_m) = 0$ si et seulement si $2m(m-2)(m^2-6m+8) = 0$,
ssi $m = 0$ ou $m - 2 = 0$ ou $m^2 - 6m + 8 = 0$,
ssi $m = 0$ ou $m = 2$ ou $m^2 - 6m + 8 = 0$.

Pour le trinôme du second degré $m^2 - 6m + 8$, on calcule son discriminant $\Delta = 36 - 32 = 4 = 2^2$ puis on trouve ses racines 2 et 4.

On a donc $\det(A_m) = 0$ ssi $m = 0$ ou $m = 2$ ou $m = 4$.

Ainsi A_m est inversible si et seulement si le réel m est différent de 0, de 2 et de 4.

Partie B ($\simeq 4$ points).

1. On se place dans le cas où $m = 2$. D'après la question 2 de la partie A, la matrice A_2 n'est pas inversible ; il est donc impossible de calculer son inverse.

2. On se place dans le cas où $m = 3$. D'après la question 2 de la partie A, la matrice A_3 est inversible.

   Pour calculer l'inverse de la matrice A_3, on procède comme en TD : on va résoudre l'équation matricielle $A_3X = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ici $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

   Il s'agit donc de résoudre le système suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrl} x & - & 2y & - & z & = & a & (E_1) \\ & & 6y & + & z & = & b & (E_2) \\ -x & - & 4y & - & z & = & c & (E_3) \end{array} \right.$$

   On prend x pour pivot dans (E_1). On ne touche pas à (E_2) puisque x n'y apparait pas. Il reste à éliminer le terme en x dans (E_3) :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & a \\ & & 6y & + & z & = & b \\ & - & 6y & - & 2z & = & c+a \end{array} \right. \quad \text{en ayant effectué } (E_3) := (E_3) + (E_1)$$

   On va maintenant éliminer le terme en y dans (E_3) (sans, évidemment, remettre du x dans cette équation) ; c'est pour cela qu'on travaille uniquement avec (E_3) et (E_2) :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & a \\ & & 6y & + & z & = & b \\ & & & - & z & = & c+a+b \end{array} \right. \quad \text{en ayant effectué } (E_3) := (E_3) + (E_2)$$

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & - & z & = & a \\ & & 6y & + & z & = & b \\ & & & & z & = & -a-b-c \end{array} \right.$$

   On remplace z par $-a-b-c$ dans (E_2) pour obtenir $6y = b - z = a + 2b + c$. D'où $y = \frac{a+2b+c}{6}$.

   Puis on remplace z et y par leurs valeurs dans (E_1) pour obtenir :

$$x = a + 2y + z = a + \frac{a+2b+c}{3} - a - b - c = \frac{a}{3} - \frac{b}{3} - \frac{2c}{3}$$

   En résumé on a obtenu $\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{a}{3} - \dfrac{b}{3} - \dfrac{2c}{3} \\ y = \dfrac{a}{6} + \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{6} \\ z = -a - b - c \end{array} \right.$

   Ce dernier système s'écrit aussi $X = NB$ où N est la matrice définie par

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Mais comme A_3 est inversible, l'équation $A_3X = B$ est équivalente à $X = A_3^{-1}B$ et donc la matrice N ci-dessus n'est autre que A_3^{-1}.

Partie C ($\simeq 11,5$ points).

On considère le système (S_m) suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} (m-2)x & + & (4-2m)y & + & (m^2-6m+8)z & =0 \\ & & 2my & + & z & =0 \\ (2-m)x & - & 4y & - & z & =0 \end{array}\right.$$

1. <u>On se place dans le cas où $m=0$.</u>
   (S_0) est le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -2x & + & 4y & + & 8z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \\ 2x & - & 4y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_0) \iff \left\{\begin{array}{l} -2x+4y=0 \\ z=0 \\ 2x-4y=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=2y \\ z=0 \\ x=2y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=2y \\ z=0 \end{array}\right.$$

Par conséquent les triplets (x,y,z) qui sont solutions du système (S_0) s'écrivent sous la forme :

$$(x,y,z)=(2y,y,0)$$

avec y un réel quelconque.

Interprétation : chacune des équations du système initial étant l'équation d'un plan dans l'espace, la résolution du système correspond à la recherche de l'intersection de trois plans ; ici l'intersection donne une droite. En effet, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi les solutions du système correspondent aux points de la droite passant par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. <u>On se place dans le cas où $m=2$.</u>
   (S_2) est le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 0x & + & 0y & + & 0z & = & 0 \\ & & 4y & + & z & = & 0 \\ & - & 4y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_2) \iff \left\{\begin{array}{l} 0=0 \\ z=-4y \\ z=-4y \end{array}\right. \iff z=-4y$$

Attention (erreur fréquente) : la première équation $0=0$ est toujours vérifiée et ne donne aucune condition sur x, ni sur y, ni sur z. Il n'y a AUCUNE raison de croire que $x=0$...

Par conséquent, les triplets (x,y,z) qui sont solutions du système (S_2) s'écrivent sous la forme :

$$(x,y,z)=(x,y,-4y)$$

avec x et y des réels quelconques.

Interprétation : chacune des équations du système initial étant l'équation d'un plan dans l'espace, la résolution du système correspond à la recherche de l'intersection de trois plans ; ici l'intersection donne un plan (et c'est même le plan d'équation $z = -4y$! ! !). En effet, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Ainsi les solutions du système correspondent aux points du plan passant par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirigé par les vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3. On se place dans le cas général où m est un réel quelconque.

a) Rappelons que le système (S_m) est le suivant :

$$\begin{cases} (m-2)x & + & (4-2m)y & + & (m^2-6m+8)z & = 0 \\ & & 2my & + & z & = 0 \\ (2-m)x & - & 4y & - & z & = 0 \end{cases}$$

En notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, le système (S_m) peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} m-2 & 4-2m & m^2-6m+8 \\ 0 & 2m & 1 \\ 2-m & -4 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire encore

$$A_m X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) D'après la question C.3.a., résoudre le système (S_m) c'est trouver tous les X vérifiant

$$A_m X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or, comme on l'a vu en cours (et en TD) lorsqu'on a déterminé l'inverse de matrices, on sait que si A_m est inversible, alors X sera donné par :

$$X = A_m^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous sommes donc en mesure de résoudre le système (S_m) pour n'importe quel réel m :

- Si $m \notin \{0; 2; 4\}$, la matrice A_m est inversible d'après la question A.2. et on procède comme expliqué trois lignes plus haut. Peu importe les coefficients de $(A_m)^{-1}$, on a :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (A_m)^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  En résumé, pour n'importe quel réel m différent de 0, 2 et 4, le système (S_m) admet un seul triplet solution : $(0; 0; 0)$. Dans ce cas, cela signifie que les 3 plans correspondant aux 3 équations définissant (S_m) s'intersectent en un seul point : le point de coordonnées $(0; 0; 0)$, origine du repère.

- Si $m = 0$, on l'a déjà traité à la question C.1.

- Si $m = 2$, on l'a déjà traité à la question C.2.

- Si $m = 4$, on résout le système (S_m) avec $m = 4$. Le système est donné par :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 4y & & & = & 0 \\ & & 8y & + & z & = & 0 \\ -2x & - & 4y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_4) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y \\ z = -8y \\ -2x - 4y - z = 0 \end{array}\right.$$

On remplace x par $2y$, et z par $-8y$ dans la troisième équation pour obtenir $-2(2y)-4y-(-8y) = 0$, c'est-à-dire $-4y - 4y + 8y = 0$, c'est-à-dire encore $0 = 0$. Par conséquent,

$$(S_4) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2y \\ z = -8y \end{array}\right.$$

Par conséquent les triplets (x, y, z) qui sont solutions du système (S_4) s'écrivent sous la forme :

$$(x, y, z) = (2y, y, -8y)$$

avec y un réel quelconque.

Interprétation : chacune des équations du système initial étant l'équation d'un plan dans l'espace, la résolution du système correspond à la recherche de l'intersection de trois plans ; ici l'intersection donne une droite. En effet, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Ainsi les solutions du système correspondent aux points de la droite passant par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$.

Fin du corrigé