Exercice 1 ($\simeq$ 5 points). On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

- Calcul du déterminant de A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

En effectuant $C_1 := C_1 + C_3$ puis $C_2 := C_2 + 2 \times C_3$ on obtient :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Comme il s'agit du déterminant d'une matrice triangulaire, on conclut directement :

$$\det(A) = 4 \times (-4) \times (-1) = 16.$$

Comme $\det(A) = 16 \neq 0$, la matrice A est inversible.

- Calcul de l'inverse de A :

Pour calculer l'inverse de la matrice A, on procède comme en TD : on va résoudre l'équation matricielle $AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} 2x & - & 4y & + & 2z & = & a & L_1 & \text{(en rouge le pivot)} \\ x & - & 2y & - & z & = & b & L_2 & \\ x & + & 2y & - & z & = & c & L_3 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccl} & - & 8y & + & 4z & = & a-2c & & \text{en ayant utilisé } L_1 := L_1 - 2\times L_3 \\ & - & 4y & & & = & b-c & & \text{en ayant utilisé } L_2 := L_2 - L_3 \\ x & + & 2y & - & z & = & c & & L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 4z = a - 2c + 8y \\ \quad y = \frac{c-b}{4} \\ x = c + z - 2y \end{array}\right.$$

On remplace y par $\dfrac{c-b}{4}$ dans L_1 ce qui donne $4z = a - 2c + 8 \times \dfrac{c-b}{4} = a - 2c + 2(c-b) = a - 2b$.
D'où $z = \dfrac{a-2b}{4}$.

On remplace y par $\dfrac{c-b}{4}$ et z par $\dfrac{a-2b}{4}$ dans L_3 et on obtient

$$x = c + \frac{a-2b}{4} - \frac{c-b}{2} = \frac{4c + (a-2b) - 2(c-b)}{4} = \frac{a+2c}{4}.$$

En résumé on a obtenu $\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{a+2c}{4} = \dfrac{a}{4} + \dfrac{c}{2} \\[2ex] y = \dfrac{c-b}{4} = \dfrac{c}{4} - \dfrac{b}{4} = -\dfrac{b}{4} + \dfrac{c}{4} \\[2ex] z = \dfrac{a-2b}{4} = \dfrac{a}{4} - \dfrac{b}{2} \end{array}\right.$

Ce dernier système s'écrit aussi $X = NB$ où N est la matrice définie par

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mais comme A est inversible, l'équation $AX = B$ est équivalente à $X = A^{-1}B$ et donc la matrice N ci-dessus n'est autre que A^{-1}.

Exercice 2 ($\simeq 8$ points).

1. On considère le système (S) suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} -x & + & y & + & 2z & = -3 \\ 3x & + & 2y & - & 6z & = -11 \\ -\frac{1}{4}x & + & y & + & \frac{1}{2}z & = -\frac{15}{4} \end{array}\right.$$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} {\color{red}x} & - & y & - & 2z & = & 3 \\ 3x & + & 2y & - & 6z & = & -11 \\ -x & + & 4y & + & 2z & = & -15 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \text{en multipliant } L_1 \text{ par } -1 \\ L_2 \\ \text{en multipliant } L_3 \text{ par } 4 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 3 \\ & & 5y & & & = & -20 \\ & & 3y & & & = & -12 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_1 \\ \text{en effectuant } L_2 := L_2 - 3 \times L_1 \\ \text{en effectuant } L_3 := L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & 2z & = & 3 \\ & & y & & & = & -4 \\ & & y & & & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & (-4) & - & 2z & = & 3 \\ & & y & & & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 2z - 1 \\ y = -4 \end{array}\right.$$

Par conséquent les triplets (x, y, z) qui sont solutions du système (S) s'écrivent sous la forme :

$$(x, y, z) = (2z - 1; -4; z)$$

avec z un réel quelconque.

Interprétation : chacune des équations du système initial étant l'équation d'un plan dans l'espace, la résolution du système correspond à la recherche de l'intersection de trois plans ; ici l'intersection donne une droite. En effet, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z-1 \\ -4 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi les solutions du système correspondent aux points de la droite passant par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. Ci-dessus j'ai exprimé les triplets solutions en fonction de z. Certains les ont peut-être exprimés en fonction de x ; dans ce cas, ils ont écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Cela donne évidemment la même droite que précédemment.

2. On considère le système (S') suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} 2x & - & 2y & - & 3z & = -6 \\ x & + & y & - & 3z & = 3 \\ -3x & + & y & + & 6z & = 3 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{rcl} (S') & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} & - & 4y & + & 3z & = & -12 & \text{en effectuant } L_1 := L_1 - 2\times L_2 \\ x & + & y & - & 3z & = & 3 & L_2 \\ & & 4y & - & 3z & = & 12 & \text{en effectuant } L_3 := L_3 + 3\times L_2 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} & - & 4y & + & 3z & = & -12 & L_1 \\ x & + & y & - & 3z & = & 3 & L_2 \\ & & & & 0 & = & 0 & \text{en effectuant } L_3 := L_3 + L_1 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{l} 3z = 4y - 12 \\ x + y - (4y - 12) = 3 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{l} z = \frac{4}{3}y - 4 \\ x = 3y - 9 \end{array}\right. \end{array}$$

Par conséquent les triplets (x, y, z) qui sont solutions du système (S') s'écrivent sous la forme :

$$(x, y, z) = \left(3y - 9; y; \frac{4}{3}y - 4\right)$$

avec z un réel quelconque.

Interprétation : chacune des équations du système initial étant l'équation d'un plan dans l'espace, la résolution du système correspond à la recherche de l'intersection de trois plans ; ici l'intersection donne une droite. En effet, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y - 9 \\ y \\ \frac{4}{3}y - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi les solutions du système correspondent aux points de la droite passant par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Remarque. Ci-dessus j'ai exprimé les triplets solutions en fonction de y. Certains les ont peut-être exprimés en fonction de x ; dans ce cas, ils ont écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{x}{3} + 3 \\ \frac{4x}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

D'autres les ont peut-être exprimés en fonction de z ; dans ce cas, ils ont écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9z}{4} \\ \frac{3z}{4} + 3 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dans tous les cas, cela donne évidemment la même droite.

Exercice 3 ($\simeq$ 7 points). Étant donné un réel m, on considère la matrice A_m de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_m = \begin{pmatrix} -m & 3m-2 & 2m+1 \\ 2m+2 & m+2 & m+2 \\ 3m+4 & m+1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calcul du déterminant de la matrice A_m :

$$\begin{aligned}
\det(A_m) &= \begin{vmatrix} -m & 3m-2 & 2m+1 \\ 2m+2 & m+2 & m+2 \\ 3m+4 & m+1 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -m & 3m-2 & -m+3 \\ 2m+2 & m+2 & 0 \\ 3m+4 & m+1 & -m+3 \end{vmatrix} && \text{en ayant effectué } C_3 := C_3 - C_2 \\
&= \begin{vmatrix} -m & 3m-2 & -m+3 \\ 2m+2 & m+2 & 0 \\ 4m+4 & -2m+3 & 0 \end{vmatrix} && \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 - L_1 \\
&= (-m+3) \times (+1) \times \begin{vmatrix} 2m+2 & m+2 \\ 4m+4 & -2m+3 \end{vmatrix} && \text{en ayant développé par rapport à } C_3 \\
&= (-m+3) \times (2m+2) \times \begin{vmatrix} 1 & m+2 \\ 2 & -2m+3 \end{vmatrix} && \text{en ayant factorisé par } 2m+2 \text{ sur } C_1
\end{aligned}$$

D'où

$$\det(A_m) = (-m+3) \times (2m+2) \times [-2m+3-2(m+2)] = 2(-m+3)(m+1)(-4m-1)$$

ce qui donne :

$$\det(A_m) = 2(m-3)(m+1)(4m+1).$$

2. La matrice A_m est inversible si et seulement si $\det(A_m) \neq 0$. Or $\det(A_m) = 2(m-3)(m+1)(4m+1)$.
Donc $\det(A_m) = 0$ ssi $m = 3$ ou $m = -1$ ou $m = -\frac{1}{4}$.
Ainsi A_m est inversible pour tout réel m différent de -1, de $-\frac{1}{4}$ et de 3.

Fin du corrigé