Exercice 1 ($\simeq 1,5$ points). Ensemble de définition D_f de la fonction f définie par $f(x) = \ln(7-9x)$?

On sait que $\ln(t)$ est définie si et seulement si $t > 0$.
Donc $f(x) = \ln(7-9x)$ est définie si et seulement si $7 - 9x > 0$.
Or $7 - 9x > 0$ ssi $7 > 9x$, ssi $\frac{7}{9} > x$, ssi $x < \frac{7}{9}$.
Conclusion.

$$D_f = \left]-\infty; \frac{7}{9}\right[.$$

Exercice 2 ($\simeq 5,5$ points). On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(1 + x - x^2\right) \mathrm{e}^{-3x}$$

1. $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 1 + x - x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-3x}$.
   On a $u'(x) = 1 - 2x$. De plus $(\mathrm{e}^w)' = w' \, \mathrm{e}^w$; en prenant $w(x) = -3x$ on obtient ici $v'(x) = -3\,\mathrm{e}^{-3x}$.
   D'où :

   $$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-3x} + \left(1 + x - x^2\right) \times \left(-3\,\mathrm{e}^{-3x}\right)$$

   Puis en factorisant par e^{-3x} on obtient :

   $$f'(x) = \left[(1-2x) - 3\left(1 + x - x^2\right)\right] \mathrm{e}^{-3x} = \left(1 - 2x - 3 - 3x + 3x^2\right) \mathrm{e}^{-3x} = \left(3x^2 - 5x - 2\right) \mathrm{e}^{-3x}.$$

2. a) D'une part, en utilisant la règle du terme de plus haut degré pour le polynôme $1 + x - x^2$, on obtient $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(1 + x - x^2\right) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$.

   D'autre part, en posant $t = -3x$, on obtient $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^{-3x} = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^t = +\infty$.

   Donc par produit, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

   b) On peut écrire :

   $$f(x) = \left(1 + x - x^2\right) \mathrm{e}^{-3x} = \mathrm{e}^{-3x} + x\,\mathrm{e}^{-3x} - x^2\,\mathrm{e}^{-3x}.$$

   Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^{-3x} = \lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^t = 0$.
   De plus, par croissances comparées (voir formulaire), on a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x\,\mathrm{e}^{-3x} = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-3x} = 0$.
   D'où, par somme des limites, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0 + 0 - 0 = 0$.

3. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \left(3x^2 - 5x - 2\right) \mathrm{e}^{-3x}.$$

Comme la dérivée s'écrit sous la forme d'un produit, on va faire un tableau de signe. Pour cela, il nous faut :

• le signe de e^{-3x} : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-3x} > 0$ (propriété de l'exponentielle : $\mathrm{e}^t > 0$ pour tout réel t) ;

• le signe de $3x^2-5x-2$: pour commencer, on calcule $\Delta = (-5)^2-4\times3\times(-2) = 25+24 = 49 = 7^2$. Le polynôme $3x^2 - 5x - 2$ admet donc deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{5-7}{2\times 3} = -\frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5+7}{2\times 3} = 2.$$

Alors $3x^2 - 5x - 2$ est du signe de $a = 3$ à l'extérieur des racines (ou faire un dessin de la parabole pour justifier ce signe...).

On peut donc dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
e^{-3x}		$+$		$+$		$+$	
$3x^2-5x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{5\,\mathrm{e}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\mathrm{e}^6}$	$\nearrow$	0

Remarque. On a

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right)\mathrm{e}^1 = \frac{9-3-1}{9}\,\mathrm{e} = \frac{5\,\mathrm{e}}{9}$$

et

$$f(2) = (1+2-4)\,\mathrm{e}^{-6} = -\frac{1}{\mathrm{e}^6}.$$

Exercice 3 ($\simeq 3,5$ points). On considère sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction f définie par $f(x) = 25x^2 + 4\sin(5x)$.

1. Pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on obtient en utilisant $(\sin u)' = u' \cos u$:

$$f'(x) = 25 \times 2x + 4 \times (5\cos(5x)) = 50x + 20\cos(5x),$$

puis, en utilisant $(\cos u)' = -u' \sin u$, on trouve :

$$f''(x) = 50 + 20 \times (-5\sin(5x)) = 50 - 100\sin(5x).$$

2. Pour étudier la convexité de f, on s'intéresse au signe de $f''(x)$. On rappelle que f est convexe là où f'' est positive ou nulle.

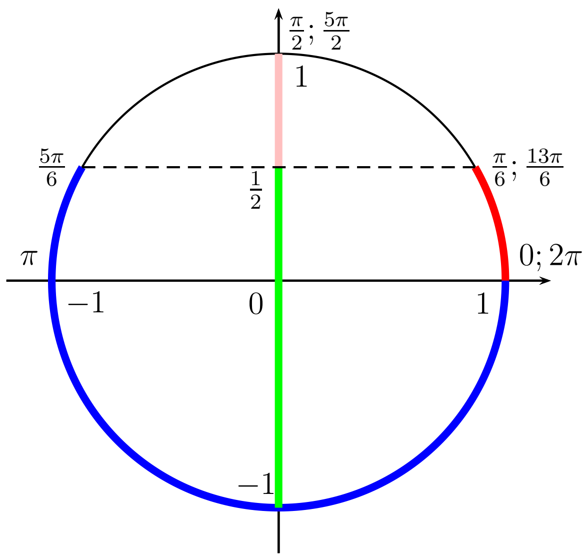
$f''(x) \geqslant 0$ ssi $50 - 100\sin(5x) \geqslant 0$, ssi $\sin(5x) \leqslant \dfrac{50}{100}$, ssi $\sin(5x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Comme $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $5x \in \left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Considérons alors un réel t tel que $t \in \left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ et cherchons d'abord à résoudre $\sin(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Travaillons pour cela avec un cercle trigo. Remarquons d'abord que, pour tout $t \in \left[0; \dfrac{5\pi}{2}\right]$, on a :

$\sin(t) = \frac{1}{2}$ ssi $t = \frac{\pi}{6}$ ou $t = \frac{5\pi}{6}$ ou $t = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$.



Par lecture sur le cercle trigo, en parcourant le cercle de $t = 0$ vers progressivement $t = \frac{5\pi}{2}$ (cela revient à faire un tour et quart), on constate (voir aussi dessin ci-dessus) que :

$\sin(t) \leqslant \frac{1}{2}$ (zone verte) ssi $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{6}$ (zone rouge, en commençant le 1er tour)

ou

$\frac{5\pi}{6} \leqslant t \leqslant \frac{13\pi}{6}$ (zone bleue en terminant le 1er tour, puis à nouveau zone rouge, lors du 2ème tour partiel).

Si on revient à x (en pensant $t = 5x$), on obtient :

$$\sin(5x) \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ ssi } 0 \leqslant 5x \leqslant \tfrac{\pi}{6} \text{ ou } \tfrac{5\pi}{6} \leqslant 5x \leqslant \tfrac{13\pi}{6},$$

$$\text{ssi } 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{\pi}{30} \text{ ou } \tfrac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \tfrac{13\pi}{30}.$$

Conclusion. La fonction f est convexe sur $\left[0; \frac{\pi}{30}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{13\pi}{30}\right]$.

Exercice 4 ($\simeq 6$ points).

1. Calcul de $\cos(2\alpha)$ avec $\alpha = \arcsin \frac{3}{8}$.

   On sait que, pour tout réel t, on a : $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$. Donc

   $$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \times (\sin\alpha)^2.$$

   Or $\sin\alpha = \sin\left(\arcsin\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{8}$ car le cours assure que $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$.
   D'où
   $$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{9}{64} = 1 - \frac{9}{32} = \frac{32-9}{32} = \frac{23}{32}.$$

2. • Calcul de $\cos(2\beta)$ avec $\beta = \arccos\frac{2}{3}$.
   On sait que, pour tout réel t, on a : $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$. Donc

   $$\cos(2\beta) = 2 \times (\cos\beta)^2 - 1.$$

   Or $\cos\beta = \cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ car le cours assure que $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$.
   D'où
   $$\cos(2\beta) = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = \frac{8-9}{9} = -\frac{1}{9}.$$

   • Puis calcul de $\cos(3\beta)$.

   Remarquons d'abord que $\cos(3\beta) = \cos(\beta + 2\beta)$.
   Or on sait que $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. Par conséquent :

   $$\cos(3\beta) = \cos(\beta)\cos(2\beta) - \sin(\beta)\sin(2\beta).$$

   On a déjà calculé $\cos(\beta)$ et $\cos(2\beta)$ précédemment ; il reste à gérer $\sin(\beta)\sin(2\beta)$.

   On sait que, pour tout réel t, on a $\sin(2t) = 2\sin t\cos t$.
   Donc ici $\sin(\beta)\sin(2\beta) = \sin(\beta) \times 2\sin(\beta)\cos(\beta) = 2\cos(\beta)\sin^2(\beta)$.
   Or, pour tout réel t, on a $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Donc $\sin^2(\beta) = 1 - \cos^2(\beta)$.
   Finalement :
   $$\sin(\beta)\sin(2\beta) = 2\cos(\beta)(1 - \cos^2(\beta)) = 2 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right)$$

   ce qui donne :
   $$\sin(\beta)\sin(2\beta) = \frac{4}{3} \times \left(1 - \frac{4}{9}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{9-4}{9} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{9} = \frac{20}{27}$$

   Conclusion.
   $$\cos(3\beta) = \frac{2}{3} \times \frac{-1}{9} - \frac{20}{27} = -\frac{2}{27} - \frac{20}{27} = -\frac{22}{27}$$

3. Calcul de $\tan(\theta)$ avec $\theta = \arccos\dfrac{3}{5}$.

   Commençons par calculer $\cos(\theta)$:
   $\cos\theta = \cos\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{3}{5}$ car le cours assure que $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.
   En particulier, on peut remarquer que $\cos\theta \neq 0$ et donc $\tan(\theta)$ est bien défini.

   Comme $\tan(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, nous allons maintenant calculer $\sin\theta$.

   Or le cours assure que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1; 1]$. Donc :

   $$\sin\theta = \sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

   Finalement,

   $$\tan(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}.$$

Exercice 5 ($\simeq 3,5$ points). Calculer

$$\alpha = \arccos\left(\cos\frac{373\pi}{7}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta = \arcsin\left(\cos\frac{28\pi}{5}\right).$$

- $\alpha = \arccos\left(\cos\dfrac{373\pi}{7}\right)$?

On souhaite utiliser le fait que, pour tout $x \in [0;\pi]$, on a $\arccos(\cos x) = x$. Pour cela, on va chercher à écrire $\cos\dfrac{373\pi}{7} = \cos x$ avec $x \in [0;\pi]$.

Comme $2\pi = 14 \times \frac{\pi}{7}$, on va diviser 373 par 14. On pose donc la division comme à l'école primaire et on trouve : $373 = 26 \times 14 + 9$. On a donc :

$$\frac{373\pi}{7} = \frac{(26\times 14+9)\pi}{7} = 26 \times \frac{14\pi}{7} + \frac{9\pi}{7} = 26 \times 2\pi + \frac{9\pi}{7}.$$

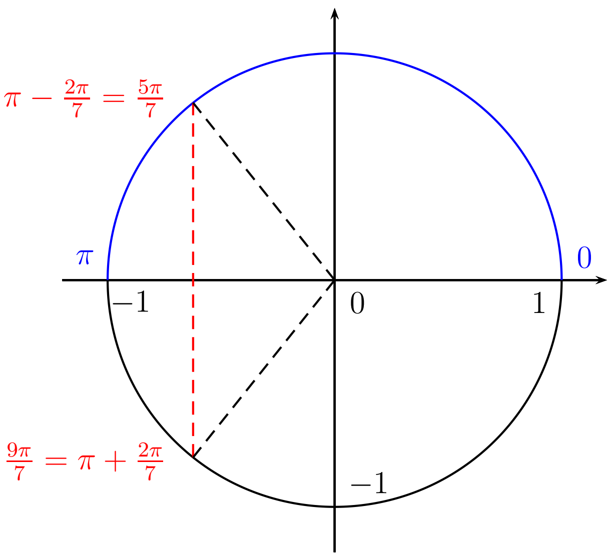
On a alors

$$\cos\left(\frac{373\pi}{7}\right) = \cos\left(26\times 2\pi + \frac{9\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{7}\right)$$

car cosinus est 2π-périodique.

Malheureusement $\frac{9\pi}{7} \notin [0;\pi]$ puisque $\frac{9\pi}{7} > \frac{7\pi}{7}$, c'est-à-dire $\frac{9\pi}{7} > \pi$.

En remarquant que $\frac{9\pi}{7} = \frac{7\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} = \pi + \frac{2\pi}{7}$, on peut tracer le cercle trigo suivant :



Ainsi

$$\cos\left(\frac{373\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right).$$

Par conséquent,

$$\alpha = \arccos\left(\cos\frac{373\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{5\pi}{7},$$

car $\frac{5\pi}{7} \in [0;\pi]$ et on peut donc utiliser le fait que, pour tout $x \in [0;\pi]$, on a $\arccos(\cos x) = x$.

- $\beta = \arcsin\left(\cos\frac{28\pi}{5}\right)$?

On commence par écrire :
$$\frac{28\pi}{5} = \frac{(30-2)\pi}{5} = 3\times 2\pi - \frac{2\pi}{5}.$$
On en déduit que
$$\cos\left(\frac{28\pi}{5}\right) = \cos\left(3\times 2\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$
car cosinus est 2π-périodique, puis
$$\cos\left(\frac{28\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$
car cosinus est paire.

Alors
$$\beta = \arcsin\left(\cos\frac{28\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right).$$

Pour continuer, on a deux approches possibles. Soit on cherche à faire apparaître du $\arccos(\cos x)$ (première méthode ci-dessous), soit on cherche à faire apparaître du $\arcsin(\sin x)$ (seconde méthode ci-dessous).

Première méthode. À noter que cette méthode repose sur une propriété uniquement vue en cours (et donc pas en TD).

Rappel. Pour tout $x \in [-1;1]$, on a $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$; et donc $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$.

On a donc ici en prenant $x = \cos\frac{2\pi}{5}$ dans l'égalité précédente :
$$\beta = \arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right).$$

Or, pour tout $x \in [0;\pi]$, on a $\arccos(\cos x) = x$. Comme $\frac{2\pi}{5} \in [0;\pi]$, on obtient :
$$\beta = \arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{5\pi}{10} - \frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{10}.$$

Seconde méthode.

On a vu précédemment que $\beta = \arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right)$. On souhaite utiliser le fait que, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, on a $\arcsin(\sin x) = x$. Pour cela, on va chercher à écrire $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \sin x$ avec $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

On sait (propriété des cosinus et sinus, voir cours si besoin – page 11 du polycopié du cours, chapitre I, partie B.6) que, pour tout réel t, on a $\cos t = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$.

Ainsi
$$\cos\frac{2\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{10} - \frac{4\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

Finalement, on obtient :
$$\beta = \arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)\right) = \frac{\pi}{10},$$
car $\frac{\pi}{10} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et on sait que, pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, on a $\arcsin(\sin x) = x$.

Fin du corrigé