

- Seul document autorisé : le formulaire distribué en première année
- Calculatrice et téléphone portable interdits
- Toutes les réponses devront être justifiées
- Énoncé à rendre avec la copie

Nom :

Prénom :

**Exercice 1** ( $\simeq 12$  points). On considère la courbe paramétrée définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} x(t) = t(t^2 - 3) \\ y(t) = (t - 3)e^t \end{cases}$$

On note  $M(t)$  le point de coordonnées cartésiennes  $(x(t); y(t))$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan. On souhaite déterminer le lieu des points  $M(t)$  lorsque le paramètre  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ .

- a) Calculer les dérivées des fonctions  $x$  et  $y$  sur  $\mathbb{R}$ . Factoriser  $y'(t)$  pour tout réel  $t$ .
- b) Calculer les limites suivantes :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ .
- c) Calculer les limites suivantes :  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$ .
- d) Dresser le tableau de variations des fonctions  $x$  et  $y$  sur  $\mathbb{R}$ . On calculera également les valeurs à mettre au bout des flèches.
2. a) Donner les coordonnées cartésiennes du point  $M(0)$  puis déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe en ce point.
- b) Même question avec les points  $M(-1)$ ,  $M(1)$  et  $M(2)$ .
3. Étudier les éventuelles branches infinies.
4. Déterminer les coordonnées cartésiennes des éventuels points où la courbe coupe l'axe des abscisses.
5. Tracer l'allure de cette courbe en respectant particulièrement les résultats trouvés aux questions précédentes.
  - Pour le tracé, il faudra absolument respecter les consignes suivantes :
    - ▶ le repère doit être orthonormé avec 1 cm correspondant à 1 ;
    - ▶ l'axe des abscisses sera gradué de  $-5$  à  $20$  ;
    - ▶ l'axe des ordonnées sera gradué de  $-10$  à  $6$ .
  - On pourra prendre pour le tracé (et uniquement pour le tracé) les valeurs approchées suivantes de la fonction exponentielle :

$t$	$-2$	$-1$	$1$	$2$
$e^t$	$0,1$	$0,4$	$2,7$	$7,4$

**Exercice 2** ( $\simeq 8$  points). On se place dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

Pour tout réel  $\theta$ , on note  $\vec{u}_\theta$  le vecteur défini par  $\vec{u}_\theta = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$ .

On considère la courbe définie en polaires par

$$r(\theta) = 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

pour tout réel  $\theta$ .

Si on note  $M(\theta)$  le point de coordonnées polaires  $(r(\theta); \theta)$ , on souhaite déterminer le lieu des points  $M(\theta)$  lorsque le paramètre  $\theta$  décrit  $\mathbb{R}$ .

On rappelle qu'ici  $\overrightarrow{OM(\theta)} = \left(1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \vec{u}_\theta$  pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ .

1. a) Par quelle transformation géométrique passe-t-on du point  $M(\theta + 4\pi)$  au point  $M(\theta)$  ?  
b) Par quelle transformation géométrique passe-t-on du point  $M(2\pi - \theta)$  au point  $M(\theta)$  ?  
c) Expliquer précisément pourquoi on peut restreindre l'étude de la courbe à l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .
2. Dresser le tableau de variations de la fonction  $r$  sur  $[-\pi; \pi]$ . On calculera également les valeurs au bout des flèches.
3. a) Calculer les coordonnées polaires du point  $M(0)$  puis déterminer un vecteur directeur de la tangente en ce point.  
b) Même question avec le point  $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ .
4. Calculer les coordonnées polaires du point  $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ .
5. Tracer l'allure de la courbe en respectant particulièrement les résultats trouvés aux questions précédentes.
  - Pour le tracé, il faudra absolument respecter les consignes suivantes :
    - ▶ le repère doit être orthonormé avec 4 cm correspondant à 1 ;
    - ▶ l'axe des abscisses sera gradué de  $-2$  à  $2$  ;
    - ▶ l'axe des ordonnées sera gradué de  $-2$  à  $2$ .
  - On pourra prendre pour le tracé (et uniquement pour le tracé) la valeur approchée suivante :  $\sqrt{2} \simeq 1,4$ .
  - On admettra que, dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,
    - ▶ la tangente au point  $M(-\pi)$  est horizontale ;
    - ▶ la tangente au point  $M(\pi)$  est verticale.

**Fin du devoir.**