

- Aucun document autorisé ; calculatrice et téléphone portable interdits
- Toutes les réponses devront être justifiées
- **La rédaction entrera pour une part importante de la notation**
- Énoncé à rendre avec la copie

Nom :

Prénom :

Exercice 1 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A .
2. Déterminer les valeurs propres de A .
3. Pour chacune des valeurs propres, déterminer avec précision l'espace propre associé, c'est-à-dire en donner une interprétation précise en terme de droite, plan...
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer, si cela est possible, une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Que vaut D ? (il n'est pas demandé de vérifier que P est inversible, ni de calculer la matrice inverse de P , ni de faire le calcul explicite de $P^{-1}AP$)

Exercice 2 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de B .
2. Déterminer les valeurs propres de B .
3. Pour chacune des valeurs propres, déterminer avec précision l'espace propre associé, c'est-à-dire en donner une interprétation précise en terme de droite, plan...
4. La matrice B est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer, si cela est possible, une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}BP$ soit diagonale. Que vaut D ? (il n'est pas demandé de vérifier que P est inversible, ni de calculer la matrice inverse de P , ni de faire le calcul explicite de $P^{-1}BP$)

Exercice 3 ($\simeq 6,5$ points). Étant donné un réel m , on considère la matrice C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 2 & m & 1 - 2m \\ 7 - m & m - 2 & 7 - m \\ 3 & -m & 2m + 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de C .
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice C possède-t-elle exactement deux valeurs propres ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice C est-elle diagonalisable ? Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice C n'est-elle pas diagonalisable ?