I.U.T. de Brest
Département GMP

Mathématiques

Compléments sur les fonctions de plusieurs variables

Équations aux dérivées partielles (E.D.P.)

Avertissement. Ce document regroupe les 3 formules de dérivées de fonctions composées utiles pour résoudre ensuite des EDP. La mise en pratique à travers des exercices sera présentée dans un second document.

Fonctions composées et leurs dérivées

► Rappel pour les composées de fonctions d'une variable

Supposons que f est une fonction d'une seule variable x, et que x est une fonction $x(t)$ dépendant d'une variable t. Formons la fonction F définie par :

$$F(t) = f(x(t)).$$

On sait bien que $F'(t) = f'(x(t)) \times x'(t)$, c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x(t)) \times \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, que l'on retient sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$$

► Composée d'une fonction de deux variables et de fonctions d'une seule variable

Supposons que f est une fonction de deux variables x et y, et que x et y sont des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ d'une variable t. Formons la fonction F définie par :

$$F(t) = f(x(t), y(t)).$$

Alors, sous réserve d'existence des diverses dérivées, $F'(t) = f'_x(x(t), y(t)) \times x'(t) + f'_y(x(t), y(t)) \times y'(t)$, c'est-à-dire $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, que l'on retient sous la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}$$

Exemple. Souvent en physique on a une quantité, disons V, qui dépend de deux paramètres, disons r et θ, qui eux dépendent du temps t. Ainsi si $V = r^3 \sin(\theta) = f(r, \theta)$, on obtient :

$$\dot{V} = 3\,\dot{r}\,r^2 \sin\theta + \dot{\theta}\,r^3 \cos(\theta),$$

où classiquement $\dot{V}$ désigne la dérivée de V par rapport à t.

▶ Composées de fonctions de deux variables

Supposons que f est une fonction de deux variables x et y, et que chacune des quantités x et y est une fonction de deux variables u et v : ainsi on a $x = x(u, v)$ et $y = y(u, v)$. Formons la fonction F définie par :

$$F(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)).$$

Alors, sous réserve d'existence des diverses dérivées, on a :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial v}\cdot}$$

Précision. Les formules précédentes doivent se comprendre de la façon suivante : si $U = (u, v)$ et si $M = (x, y) = (x(u, v), y(u, v))$, on a :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(U) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) \times \frac{\partial x}{\partial u}(U) + \frac{\partial f}{\partial y}(M) \times \frac{\partial y}{\partial u}(U) \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v}(U) = \frac{\partial f}{\partial x}(M) \times \frac{\partial x}{\partial v}(U) + \frac{\partial f}{\partial y}(M) \times \frac{\partial y}{\partial v}(U)\cdot$$

Exemple. Supposons que $f(x, y) = 3xy^4$.

Posons $x = \dfrac{u - v}{3}$ et $y = v$. Alors

$$F(u, v) = f\left(\frac{u - v}{3}, v\right) = (u - v)v^4.$$

Pour calculer les dérivées partielles premières de $F(u, v)$, on peut soit dériver directement $(u - v)v^4$, soit utiliser les formules encadrées plus haut. Évidemment, dans les deux cas, on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = v^4 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = (4u - 5v)v^3.$$

Application aux EDP

Une équation aux dérivées partielles (en abrégé EDP) est aux fonctions de plusieurs variables ce que sont les équations différentielles aux fonctions d'une seule variable. Une EDP bien connue est l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \times \frac{\partial f}{\partial t},$$

où f représente la température au temps t du point de coordonnées (x, y, z). On pourra vérifier qu'une solution est donnée par :

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{t\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{1}{4\alpha t}(x^2 + y^2 + z^2)\right).$$

Il existe en analyse numérique des méthodes pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Cependant certaines EDP peuvent être résolues « à la main ». Par exemple, si la fonction inconnue f dépend des deux variables x et y, l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

a pour solution toutes les fonctions f qui s'écrivent sous la forme $f(x, y) = \varphi(x)$ où φ est une fonction d'une variable.

D'autre part, si la fonction inconnue f dépend des deux variables x et y, l'EDP

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

a pour solution toutes les fonctions f qui s'écrivent sous la forme $f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$ où φ et ψ sont des fonctions dérivables d'une variable.

Certaines EDP peuvent être résolues en effectuant un changement de variables. Pour cela il faut exploiter les formules de dérivation des fonctions composées vues aux paragraphes précédents. Par exemple, en utilisant le changement de variables $u = 3x + y$ et $v = y$, on peut montrer que les solutions de l'EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \times \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

sont les fonctions que l'on peut écrire sous la forme $f(x, y) = \varphi(3x + y)$ où φ est une fonction dérivable d'une variable.

De nombreux exercices de résolution d'EDP avec changement de variables sont proposés dans le second fichier pdf présenté dans la partie « Pour s'entraîner ».