I.U.T. de Brest
Département GMP

Mathématiques

Compléments sur les fonctions de plusieurs variables

Exercices corrigés sur les équations aux dérivées partielles

Avertissement. Les exercices 1 à 5 ne sont pas à proprement parler des résolutions d'équations aux dérivées partielles (E.D.P.). Cependant c'est une bonne entrée en matière pour faciliter la compréhension des exercices suivants qui, eux, traitent bien d'EDP.

Exercice 1. Déterminer toutes les fonctions f de deux variables x et y vérifiant les trois conditions :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2 \qquad \text{et} \qquad f(1,1) = 0.$$

Solution.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy.$$

Donc, en intégrant $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x (et en pensant à y constant), on obtient :

$$f(x,y) = 3yx^2 + \varphi(y)$$

avec φ une fonction dérivable d'une variable. Dans ce cas, en dérivant $f(x,y)$ par rapport à y (et donc à x constant), on en déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + \varphi'(y).$$

Si l'on veut que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2$, on doit avoir $\varphi'(y) = 3y^2$.

En intégrant, on obtient $\varphi(y) = y^3 + c$ avec c une constante réelle.

D'où

$$f(x,y) = 3yx^2 + y^3 + c.$$

La condition $f(1,1) = 0$ impose $3 \times 1 \times 1^2 + 1^3 + c = 0$, c'est-à-dire $c = -4$.

Conclusion. La seule fonction f de deux variables vérifiant les trois conditions suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 3y^2, \qquad f(1,1) = 0,$$

est définie par :

$$f(x,y) = 3yx^2 + y^3 - 4.$$

Exercice 2. Déterminer la seule fonction f de deux variables vérifiant les trois conditions suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + 3y - \cos(x); \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y + 3x - \ln(y); \qquad f(0,1) = 0.$$

Solution.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + 3y - \cos(x).$$

Donc, en intégrant $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x (et en pensant à y constant), on obtient :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 3xy - \sin x + \varphi(y)$$

avec φ une fonction dérivable d'une variable. Dans ce cas, en dérivant $f(x,y)$ par rapport à y (et donc à x constant), on en déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 3x - 0 + \varphi'(y) = 3x + \varphi'(y).$$

Si l'on veut que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = y + 3x - \ln(y)$, on doit avoir $\varphi'(y) = y - \ln y$, et donc $\varphi(y) = \dfrac{1}{2}y^2 - y\ln y + y + c$ avec c une constante réelle.

Remarque. Pour ceux qui l'ont oublié, une primitive de $\ln t$ est bien $t\ln t - t$. Cela se détermine à l'aide d'une IPP...

Retour à l'exercice. On obtient finalement

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 3xy - \sin x + \frac{1}{2}y^2 - y\ln y + y + c.$$

La condition $f(0,1) = 0$ impose alors que

$$\frac{1}{2} \times 0^2 + 3 \times 0 \times 1 - \sin 0 + \frac{1}{2} \times 1^2 - 1 \times \ln 1 + 1 + c = 0,$$

ce qui donne $c = -\dfrac{3}{2}$ car $\sin 0 = 0$ et $\ln 1 = 0$.

Conclusion. La seule fonction f de deux variables vérifiant les trois conditions suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + 3y - \cos(x), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y + 3x - \ln(y), \qquad f(0,1) = 0,$$

est définie par :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 3) + 3xy - \sin x + y - y\ln(y).$$

Exercice 3. Déterminer toutes les fonctions f de deux variables x et y, définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ et vérifiant les deux conditions :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} + 2x \sin y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + x^2 \cos y.$$

Solution.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} + 2x \sin y$$

donc

$$f(x, y) = 2 \ln |x| + x^2 \sin(y) + \varphi(y)$$

avec φ une fonction dérivable d'une variable. Dans ce cas, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(y) + \varphi'(y).$$

Si l'on veut que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y} + x^2 \cos y$, on doit avoir $\varphi'(y) = \frac{1}{y}$, et donc $\varphi(y) = \ln |y| + c$ avec c une constante réelle.

D'où

$$f(x, y) = 2 \ln |x| + x^2 \sin(y) + \ln |y| + c = \ln |x^2 y| + x^2 \sin y + c.$$

Conclusion. Les fonctions f de deux variables vérifiant les deux conditions suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{x} + 2x \sin y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + x^2 \cos y.$$

sont définies par :

$$f(x, y) = \ln |x^2 y| + x^2 \sin y + c,$$

avec c une constante réelle.

Exercice 4. Déterminer les fonctions f de deux variables définies pour (x, y) tel que $y \neq 0$, et vérifiant les deux conditions suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+2y}{x^2+y^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y-2x}{x^2+y^2} + 3y^2.$$

Solution.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+2y}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+y^2} + 2 \times \frac{\frac{1}{y}}{(\frac{x}{y})^2+1}.$$

Donc

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \varphi(y)$$

avec φ une fonction dérivable d'une variable. Dans ce cas, on en déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + 2 \times \frac{-\frac{x}{y^2}}{(\frac{x}{y})^2+1} + \varphi'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} - 2 \times \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y).$$

Si l'on veut que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y-2x}{x^2+y^2} + 3y^2$, on doit avoir $\varphi'(y) = 3y^2$, et donc $\varphi(y) = y^3 + c$ avec c une constante réelle.

D'où

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + y^3 + c.$$

Conclusion. Les fonctions f de deux variables définies pour (x, y) tel que $y \neq 0$, et vérifiant les deux conditions suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x+2y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y-2x}{x^2+y^2} + 3y^2,$$

sont celles données par :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + y^3 + c,$$

où c est une constante réelle quelconque.

Exercice 5 (niveau difficile). Déterminer toutes les fonctions f de deux variables x et y, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et vérifiant les trois conditions :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{et} \qquad f(0,1)=1.$$

Solution.

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2).$$

Or par une IPP on obtient

$$\int \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x = [x\times\ln(x^2+y^2)] - \int x\times\frac{2x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = x\times\ln(x^2+y^2) - 2\int\frac{x^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x = x\times\ln(x^2+y^2) - 2\int\frac{x^2+y^2-y^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = x\times\ln(x^2+y^2) - 2\int(1-\frac{y^2}{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x$$

$$\int \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x = x\times\ln(x^2+y^2) - 2x + 2\int\frac{1}{(\frac{x}{y})^2+1}\,\mathrm{d}x = x\times\ln(x^2+y^2) - 2x + 2\int y\times\frac{\frac{1}{y}}{(\frac{x}{y})^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x = x\times\ln(x^2+y^2) - 2x + 2y\times\int\frac{\frac{1}{y}}{(\frac{x}{y})^2+1}\,\mathrm{d}x = x\times\ln(x^2+y^2) - 2x + 2y\times\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+k,$$

avec k une constante par rapport à la variable x. D'où

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\times\left(x\times\ln(x^2+y^2) - 2x + 2y\times\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi(y)\right)$$

avec φ une fonction dérivable d'une variable. Dans ce cas, on en déduit que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\times\left(x\times\frac{2y}{x^2+y^2} + 2\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + 2y\times\frac{-\frac{x}{y^2}}{(\frac{x}{y})^2+1} + \varphi'(y)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\times\left(x\times\frac{2y}{x^2+y^2} + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + 2y\times\frac{-x}{x^2+y^2} + \varphi'(y)\right) = \frac{1}{2}\times\left(2\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi'(y)\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}\times\varphi'(y).$$

Si l'on veut que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$, on doit avoir $\varphi'(y)=0$, et donc $\varphi(y)=c$ avec c une constante réelle.

D'où

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\times\left(x\times\ln(x^2+y^2) - 2x + 2y\times\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+\varphi(y)\right) = \frac{x}{2}\times\ln(x^2+y^2) - x + y\times\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+C$$

avec C une constante réelle.

La condition $f(0,1)=1$ impose $C=1$ car $\arctan 0=0$.

Conclusion. La seule fonction f de deux variables vérifiant les trois conditions suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\arctan\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \text{et} \qquad f(0,1)=1$$

est définie par :

$$f(x,y)=\frac{x}{2}\times\ln(x^2+y^2)-x+y\times\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+1.$$

Exercice 6. Résoudre les EDP :

$$(1)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = y; \qquad (2)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = x\sin y; \qquad (3)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y}{x} \text{ où } x > 0 \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

Solution.

1. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = y.$$

Donc, en intégrant $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ par rapport à y (en supposant x constant), on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x)$$

avec φ une fonction dérivable d'une variable. En intégrant $\frac{\partial f}{\partial x}$ par rapport à x (en supposant y constant), on en déduit que :

$$f(x,y) = \frac{1}{2}y^2 x + \phi(x) + \psi(y)$$

avec ϕ une fonction deux fois dérivable d'une variable (en fait $\phi'(x) = \varphi(x)$) et ψ une fonction dérivable d'une variable.

2. Même technique qu'à la question 1.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = x\sin y \qquad \text{ssi} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -x\cos y + \varphi(x)$$

avec φ une fonction dérivable d'une variable. Par conséquent

$$f(x,y) = -\frac{1}{2}x^2\cos y + \phi(x) + \psi(y)$$

avec ϕ une fonction deux fois dérivable d'une variable et ψ une fonction dérivable d'une variable.

3. Pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y}{x} \qquad \text{ssi} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = y\ln x + \varphi(y)$$

avec φ une fonction dérivable d'une variable. Par conséquent

$$f(x,y) = y(x\ln x - x) + x\varphi(y) + \psi(y)$$

avec φ et ψ deux fonctions dérivables d'une variable.

Exercice 7. En utilisant le changement de variables $u = 3x + y$ et $v = y$, résoudre l'EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \times \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Solution.

On pose $F(u, v) = f(x, y) = f\left(\frac{u-v}{3}, v\right)$, ce qui revient au même de dire $f(x, y) = F(3x+y, y)$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y}$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3 \times \frac{\partial F}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \times \frac{\partial f}{\partial y} = 3 \times \frac{\partial F}{\partial u} - 3 \times \left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\right) = -3 \times \frac{\partial F}{\partial v}$$

Par conséquent $\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \times \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ssi $-3 \times \frac{\partial F}{\partial v} = 0$, ssi $\frac{\partial F}{\partial v} = 0$, ssi $F(u, v) = \varphi(u)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable, ssi $F(3x + y, y) = \varphi(3x + y)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable.

Conclusion. Les solutions de l'EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3 \times \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

sont les fonctions que l'on peut écrire sous la forme $f(x, y) = \varphi(3x + y)$ où φ est une fonction dérivable d'une variable.

Exercice 8. Résoudre l'EDP
$$2\times\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=x-y,$$
où l'inconnue f est une fonction des deux variables x et y.
On pourra poser $u=x+y$ et $v=x+2y$, et considérer la fonction F définie par $F(u,v)=f(x,y)$.

Solution.

Si $u=x+y$ et $v=x+2y$, alors $x=2u-v$ et $y=v-u$.

On pose $F(u,v)=f(x,y)=f\left(2u-v,v-u\right)$, ce qui revient au même de dire $f(x,y)=F(x+y,x+2y)$. Alors
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial x}\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}$$
Donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial u}+2\times\frac{\partial F}{\partial v}$$
Alors
$$2\times\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=2\times\left(\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial v}\right)-\left(\frac{\partial F}{\partial u}+2\times\frac{\partial F}{\partial v}\right)=\frac{\partial F}{\partial u}$$
Par conséquent $2\times\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=x-y$ ssi $\frac{\partial F}{\partial u}=(2u-v)-(v-u)$, ssi $\frac{\partial F}{\partial u}=3u-2v$, ssi $F(u,v)=\frac{3}{2}u^2-2vu+\varphi(v)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable, ssi $F(x+y,x+2y)=\frac{3}{2}(x+y)^2-2(x+2y)(x+y)+\varphi(x+2y)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable.

Conclusion. Les solutions de l'EDP :
$$2\times\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}=x-y,$$
sont les fonctions que l'on peut écrire sous la forme
$$f(x,y)=\frac{3}{2}(x+y)^2-2(x+2y)(x+y)+\varphi(x+2y)$$
où φ est une fonction dérivable d'une variable.

Exercice 9. Résoudre l'EDP

$$\frac{1}{2} \times \frac{\partial f}{\partial x} - x \times \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

où l'inconnue f est une fonction des deux variables x et y, définie sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant $f(0, y) = \sin(2y)$ pour tout réel y.

On pourra poser $u = x$ et $v = y + x^2$, et considérer la fonction F définie par $F(u, v) = f(x, y)$.

Solution.

Si $u = x$ et $v = y + x^2$, alors $x = u$ et $y = v - u^2$.

On pose $F(u, v) = f(x, y) = f\left(u, v - u^2\right)$, ce qui revient au même de dire $f(x, y) = F(x, y + x^2)$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y}$$

Donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} + 2x \times \frac{\partial F}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial v}$$

Alors

$$\frac{1}{2} \times \frac{\partial f}{\partial x} - x \times \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\partial F}{\partial u} + 2x \times \frac{\partial F}{\partial v}\right) - x \times \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{1}{2} \times \frac{\partial F}{\partial u}$$

Par conséquent $\frac{1}{2} \times \frac{\partial f}{\partial x} - x \times \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ssi $\frac{1}{2} \times \frac{\partial F}{\partial u} = 0$, ssi $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, ssi $F(u, v) = \varphi(v)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable, ssi $F(x, y + x^2) = \varphi(y + x^2)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable.

D'où $f(x, y) = \varphi(y + x^2)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable.

Or on veut aussi que $f(0, y) = \sin(2y)$. Donc $f(0, y) = \varphi(y + 0^2) = \varphi(y) = \sin(2y)$. Finalement $f(x, y) = \varphi(y + x^2) = \sin\left(2(y + x^2)\right) = \sin\left(2y + 2x^2\right)$.

Conclusion. La solution de l'EDP :

$$\frac{1}{2} \times \frac{\partial f}{\partial x} - x \times \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

vérifiant $f(0, y) = \sin(2y)$, est la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin\left(2y + 2x^2\right).$$

Exercice 10. Résoudre l'EDP

$$x \times \frac{\partial f}{\partial x} + y \times \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

où l'inconnue f est une fonction des deux variables x et y, définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
On pourra poser $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, et considérer la fonction F définie par $F(r, \theta) = f(x, y)$.

Solution.

Comme $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x > 0$ et dans le changement de variables on peut prendre $r > 0$ et $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Si $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, alors $x^2 + y^2 = r^2$ et $\frac{y}{x} = \tan(\theta)$.

Par conséquent $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

On pose $F(r, \theta) = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$,
ce qui revient au même de dire $f(x, y) = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$. Alors

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial y}$$

Alors

$$x \times \frac{\partial f}{\partial x} + y \times \frac{\partial f}{\partial y} = r\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} + r\sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial y} = r\left(\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial y}\right) = r \times \frac{\partial F}{\partial r}$$

Par conséquent $x \times \frac{\partial f}{\partial x} + y \times \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ssi $r \times \frac{\partial F}{\partial r} = r$, ssi $\frac{\partial F}{\partial r} = 1$, ssi $F(r, \theta) = r + \varphi(\theta)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable, ssi $F\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable.

D'où $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable.

Conclusion. Les solutions de l'EDP :

$$x \times \frac{\partial f}{\partial x} + y \times \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

sont les fonctions que l'on peut écrire sous la forme

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

où φ est une fonction dérivable d'une variable.

Exercice 11. Considérons une fonction f d'une seule variable qui est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons, pour tout réel x et tout réel t, $u(x,t) = f(ax + a^2 t)$ où $a \neq 0$ est un paramètre réel fixé.

1. Calculer $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ et $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.
2. En déduire les fonctions f telles que u vérifie l'équation (E) suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

   et en déduire que les fonctions définies par e^{x+t} et par e^{-x+t} sont solutions de l'équations (E).

Solution.

1. Par dérivation des fonctions composées d'une variable, on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a^2 \times f'(ax + a^2 t);$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = a \times f'(ax + a^2 t), \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = a \times (a \times f''(ax + a^2 t)) = a^2 \times f''(ax + a^2 t).$$

2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{ssi} \quad a^2 \times f'(ax+a^2t) - a^2 \times f''(ax+a^2t) = 0 \quad \text{ssi} \quad f'(ax+a^2t) = f''(ax+a^2t).$$

   On cherche donc les fonctions f qui vérifient $f'(ax + a^2t) = f''(ax + a^2t)$ pour tout réel x et tout réel t. Pour $t = 0$ la fonction f doit vérifier $f'(ax+a^2t) = f''(ax+a^2t)$, c'est-à-dire $f'(ax) = f''(ax)$ pour tout réel x. Comme $a \neq 0$, cela revient au même de dire que $f'(X) = f''(X)$ pour tout réel X.

   Or $f'(X) = f''(X) \quad \text{ssi} \quad f'(X) = k\,\mathrm{e}^X \ (k \in \mathbb{R}), \quad \text{ssi} \quad f(X) = k\,\mathrm{e}^X + c \ (k, c \in \mathbb{R})$.

   D'où

$$u(x,t) = f(ax + a^2t) = k\,\mathrm{e}^{ax+a^2t} + c.$$

   Pour $a = 1$, $k = 1$ et $c = 0$, on trouve $u(x,t) = \mathrm{e}^{x+t}$.

   Pour $a = -1$, $k = 1$ et $c = 0$, on trouve $u(x,t) = \mathrm{e}^{-x+t}$.

Exercice 12. Équation des cordes vibrantes.
On considère une corde de longueur ℓ fixée aux deux bouts et que l'on fait vibrer. Le mouvement de la corde en fonction du temps est alors décrit par une équation, dite équation des cordes vibrantes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad (\forall x \in [0;\ell], \forall t \geqslant 0),$$

avec c une constante réelle non nulle.

Résoudre cette EDP en utilisant le changement de variables $u = x + ct$ et $v = x - ct$.

Solution.

Première étape. À partir du changement de variables $u = x + ct$ et $v = x - ct$, on obtient

$$x = \frac{u+v}{2}, \qquad t = \frac{u-v}{2c}\cdot$$

Ainsi $f(x,t) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2c}) = g(u,v)$.

Deuxième étape. Déterminons les dérivées partielles premières de g. On a :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{2} \times \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2c} \times \frac{\partial f}{\partial t}\cdot$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{2} \times \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2c} \times \frac{\partial f}{\partial t}\cdot$$

Troisième étape. Déterminons les dérivées partielles secondes de g et tout particulièrement $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$. On a :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial G}{\partial v}, \qquad \text{où } G = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot$$

Mais en notant

$$F(x,t) = \frac{1}{2} \times \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2c} \times \frac{\partial f}{\partial t}$$

on a $G(u,v) = F(x,t)$. Par conséquent

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial t} \times \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{2} \times \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{2c} \times \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (*)$$

Or comme

$$F(x,t) = \frac{1}{2} \times \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2c} \times \frac{\partial f}{\partial t}$$

on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2c} \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2c} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\cdot$$

En remplaçant dans la relation $(*)$ les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial t}$ par ce qu'on vient de trouver ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{2c} \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\right) - \frac{1}{2c} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} + \frac{1}{2c} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{1}{4} \times \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{4c} \times \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - \frac{1}{4c} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} - \frac{1}{4c^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

D'où puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$, on trouve

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{1}{4} \times \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{4c^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \times \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right).$$

Quatrième étape. Ainsi avec le résultat précédent on voit que résoudre l'EDP de départ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

revient à résoudre l'EDP

$$4 \times \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 0,$$

c'est-à-dire à résoudre l'EDP

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = 0.$$

Or cette dernière équation nous donne successivement $\frac{\partial g}{\partial u} = \varphi(u)$ puis $g(u, v) = \psi(u) + \epsilon(v)$ où ψ et ϵ sont des fonctions, d'une seule variable, dérivables.
En revenant aux variables x et y, on voit que les fonctions f solutions de l'EDP

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

sont les fonctions s'écrivant sous la forme

$$f(x, t) = \psi(x + ct) + \epsilon(x - ct),$$

où ψ et ϵ sont des fonctions, d'une seule variable, dérivables.

Par exemple voici quelques exemples de fonctions solutions :

$$f(x, t) = 28 \cos(x + ct) - 13 \sin(x - ct);$$

$$f(x, t) = \mathrm{e}^{x+ct} + (x - ct)^4 - 7(x - ct) + 12;$$

$$f(x, t) = x = \frac{x + ct}{2} + \frac{x - ct}{2}.$$

Exercice 13. Résoudre l'EDP
$$x \times \frac{\partial f}{\partial y} - y \times \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$
où l'inconnue f est une fonction des deux variables x et y, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
On pourra poser $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, et considérer la fonction F définie par $F(r,\theta) = f(x,y)$.

Solution.

Comme f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dans le changement de variables on peut prendre $r > 0$ et $\theta \in [0; 2\pi]$.

Si $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, alors $x^2 + y^2 = r^2$ et donc $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

On pose $F(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors
$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial \theta}$$
Donc
$$\frac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial y}$$
Alors
$$x \times \frac{\partial f}{\partial y} - y \times \frac{\partial f}{\partial x} = r\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial y} - r\sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \theta}$$
Par conséquent $x \times \dfrac{\partial f}{\partial y} - y \times \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ ssi $\dfrac{\partial F}{\partial \theta} = 0$, ssi $F(r,\theta) = \varphi(r)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable.

D'où $f(x,y) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ avec φ une fonction dérivable d'une variable.

Conclusion. Les solutions de l'EDP :
$$x \times \frac{\partial f}{\partial y} - y \times \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$
sont les fonctions que l'on peut écrire sous la forme
$$f(x,y) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$
où φ est une fonction dérivable d'une variable.

Exercice 14. Résoudre l'EDP :
$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Solution.

Posons $g(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. L'EDP devient
$$g + \frac{\partial g}{\partial x} = y\,\mathrm{e}^{2x},$$
c'est-à-dire
$$\frac{\partial g}{\partial x} + g = y\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Cela revient à résoudre l'équa. diff. (E) définie par $z' + z = y\,\mathrm{e}^{2x}$ où z est fonction de la seule variable x et où on fait comme si y était une constante fixée.

Alors $z = z_H + z_P$. On sait que $z_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-x}$ avec λ une « constante » par rapport à x, donc en fait $\lambda = \lambda(y)$. Pour trouver une solution particulière z_P de (E), on la cherche sous la forme $z_P = A\,\mathrm{e}^{2x}$ avec A une constante en x. Alors $z_P = A\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution de (E) ssi $2A\,\mathrm{e}^{2x} + A\,\mathrm{e}^{2x} = y\,\mathrm{e}^{2x}$, càd ssi $3A = y$, càd ssi $A = \dfrac{y}{3}$. D'où
$$z = \lambda(y) \times \mathrm{e}^{-x} + \frac{y}{3} \times \mathrm{e}^{2x}\,.$$

Autrement dit
$$g(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lambda(y) \times \mathrm{e}^{-x} + \frac{y}{3} \times \mathrm{e}^{2x}\,.$$

Par conséquent,
$$f(x, y) = \varphi(y) \times \mathrm{e}^{-x} + \frac{y^2}{6} \times \mathrm{e}^{2x} + \psi(x),$$
où φ est une fonction deux fois dérivable d'une variable et ψ est une fonction dérivable d'une variable.

Exercice 15. Laplacien en coordonnées polaires.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles troisièmes. On rappelle que le laplacien de f est défini par :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

a) En posant $F(r,\theta) = f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, montrer que

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \times \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial F}{\partial r}.$$

b) On dit que f est harmonique si $\Delta f = 0$. La fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ est-elle harmonique ?

Solution.

a)

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial y}$$

- Calcul de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial F}{\partial r}) = \cos\theta \times \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial f}{\partial x}) + \sin\theta \times \frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial f}{\partial y})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \cos\theta \times \left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) \times \frac{\partial y}{\partial r}\right) + \sin\theta \times \left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) \times \frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \cos\theta \times \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times \sin\theta\right) + \sin\theta \times \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times \cos\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times \sin\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times 2\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times \sin^2\theta$$

- Calcul de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial F}{\partial \theta}) = -r\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta \times \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial f}{\partial x}) - r\sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\theta \times \frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial f}{\partial y})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta \times \left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) \times \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) \times \frac{\partial y}{\partial \theta}\right) - r\sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+ r\cos\theta \times \left(\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) \times \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) \times \frac{\partial y}{\partial \theta}\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta \times \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times (-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times r\cos\theta\right) - r\sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$+ r\cos\theta \times \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times (-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times r\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -r\cos\theta \times \frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta \times \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times r^2\sin^2\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times 2r^2\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times r^2\cos^2\theta$$

On reconnaît que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -r \times \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times r^2\sin^2\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times 2r^2\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times r^2\cos^2\theta$$

Donc

$$\frac{1}{r^2} \times \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{r} \times \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \sin^2\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times 2\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times \cos^2\theta$$

D'où

$$\frac{1}{r^2} \times \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \sin^2\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times 2\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times \cos^2\theta$$

Mais on a vu précédemment que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \cos^2\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times 2\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times \sin^2\theta$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{r^2} \times \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times (\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \times (2-2)\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \times (\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

càd

$$\frac{1}{r^2} \times \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f.$$

Ouf !

b) La fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est-elle harmonique ?
Ici $F(r, \theta) = f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r$.
Alors

$$\frac{\partial F}{\partial r} = 1; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0; \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0 = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}.$$

Donc

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \times \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \times \frac{\partial F}{\partial r} = 0 + 0 + \frac{1}{r} = \frac{1}{r}.$$

f n'est donc pas harmonique.