I.U.T. de Brest
Département GMP

Mathématiques

Compléments sur le calcul matriciel

Applications de la diagonalisation

Application en Mécanique et Dimensionnement des Structures

► La « matrice d'inertie » d'un solide, dans un repère orthonormal fixé $\left(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$ de l'espace, est une matrice carrée symétrique d'ordre 3 définie de la façon suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix},$$

où d'une part A, B et C sont les « moments d'inertie » du solide par rapport respectivement aux axes $\left(O, \vec{x}\right)$, $\left(O, \vec{y}\right)$ et $\left(O, \vec{z}\right)$,
et d'autre part D, E et F sont les « produits d'inertie » du solide par rapport respectivement aux plans $\left(O, \vec{y}, \vec{z}\right)$, $\left(O, \vec{x}, \vec{z}\right)$ et $\left(O, \vec{x}, \vec{y}\right)$.

Alors,

- les moments principaux d'inertie A_1, B_1, C_1 sont les valeurs propres de la matrice M ;
- les axes principaux d'inertie $\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}$ sont tels que $\left(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}\right)$ soit une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de M.

► Étant donnée la matrice M des contraintes dans un matériau, les contraintes principales sont les valeurs propres de M, et leurs directions principales sont les vecteurs propres.

Puissance d'une matrice

On considère une matrice carrée A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On cherche à déterminer A^n pour tout entier naturel n.

Si A est diagonalisable, on peut écrire $P^{-1}AP = D$ où D est une matrice diagonale.

On a donc $A = PDP^{-1}$, et par conséquent pour tout n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

Pour le démontrer, il faudrait en toute rigueur faire un raisonnement par récurrence ; cependant, pour donner une idée du raisonnement, démontrons le résultat pour $n = 3$:

$$A^3 = A \times A \times A = PDP^{-1} \times PDP^{-1} \times PDP^{-1} = PD(P^{-1} \times P)D(P^{-1} \times P)DP^{-1} = PDI_3DI_3DP^{-1}$$

Donc

$$A^3 = P(DI_3DI_3D)P^{-1} = P(DDD)P^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

Revenons au cas général. D est de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Donc

$$D^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

Ainsi connaissant P et D^n, on peut calculer A^n.

Suites récurrentes

Une suite récurrente linéaire d'ordre p est une suite de réels dont les termes sont calculés à partir des termes qui le précèdent par une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+p} = a_0 \times u_n + a_1 \times u_{n+1} + a_2 \times u_{n+2} + \cdots + a_{p-1} \times u_{n+p-1}$$

où $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{p-1}$ sont des réels fixés.

Exemple 1. Suite géométrique. La suite géométrique de raison q définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = q \times u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $p = 1$.

C'est un classique de démontrer que $u_n = q^n \times u_0 = 2 \times q^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exemple 2. Suite de Fibonacci. La suite définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $p = 2$.

L'étude de cette suite fait intervenir le nombre d'or $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On peut alors démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$u_n = \frac{\Phi^n - \Phi'^n}{\sqrt{5}}$$

avec $\Phi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1}{\Phi}$.

Pour démontrer ce résultat, il y a plusieurs façons de procéder. L'une d'elles repose sur la diagonalisation de matrices. Pour cela, on pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

On a donc :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times u_n + 1 \times u_{n+1} \\ 1 \times u_n + 1 \times u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on a $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On obtient alors $X_n = A^n X_0$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Pour calculer A^n, on procède comme on l'a vu précédemment dans la partie « Puissance d'une matrice ». Pour cela, on diagonalise la matrice A ; on se rend compte que ses valeurs propres sont Φ et Φ' et on peut terminer le boulot pour retrouver la formule annoncée plus haut pour déterminer u_n...

Remarque 1. Pour les plus curieux, vous pourrez trouver davantage d'infos sur la suite de Fibonacci en consultant la page Wikipédia qui lui est consacré (cliquez directement dans le rectangle bleu) :

La suite de Fibonacci sur Wikipédia

Remarque 2. De façon générale, on peut reproduire le raisonnement précédent avec n'importe quelle suite récurrente linéaire d'ordre p. On peut se retrouver avec une écriture de la forme $X_{n+1} = AX_n$ mais la matrice A est alors carrée de taille p.

Terminons cette partie sur les suites récurrentes par un exercice (corrigé) traitant de l'évolution de populations.

Exercice. Migration entre deux villes. Deux villes X et Y totalisent une population d'un million d'habitants. La ville X est plus agréable, mais la ville Y offre plus de possibilités d'emplois ; 20% des habitants de Y partent chaque année habiter X pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de X partent chaque année habiter Y pour trouver un meilleur emploi.

1. Sachant qu'à l'année 0, un quart des habitants sont en X, quelle est la population de X et de Y au bout de 1 an, 2 ans, 5 ans, 10 ans ?
2. Sachant qu'à l'année 0, un quart des habitants sont en X, quelle est la population de X et de Y au bout de n ans (où n est un entier quelconque) ?
   Indication : on pourra considérer le vecteur de $\mathbb{R}^2$: $X_n = (a_n, b_n)$ où a_n est la population de la ville X après n années, et b_n la population de Y. On montrera pour commencer qu'on a une relation de récurrence linéaire de la forme $X_{n+1} = AX_n$.
3. Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$? Vers quoi tendent les populations de X et Y ?

Remarque. Le vecteur X_n s'appelle *vecteur d'état* du système, et la matrice A est la *matrice de transition.*

Solution de l'exercice.

1. On a

	X	Y
année 0	250000	750000
année 1	387500	612500
année 2	490625	509375
année 5	$\simeq$ 669482	$\simeq$ 330518
année 10	$\simeq$ 769028	$\simeq$ 230972

2. $a_0 = 250000$ et $b_0 = 750000$. De plus :

$$a_{n+1} = a_n - \frac{5}{100}a_n + \frac{20}{100}b_n = 0,95a_n + 0,2b_n.$$

De même,

$$b_{n+1} = b_n - \frac{20}{100}b_n + \frac{5}{100}a_n = 0,05a_n + 0,8b_n.$$

Ainsi on obtient :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a_n + 0,2b_n \\ 0,05a_n + 0,8b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

On a donc bien $X_{n+1} = AX_n$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,2 \\ 0,05 & 0,8 \end{pmatrix}$. Par récurrence on voit que $X_n = A^n X_0$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250000 \\ 750000 \end{pmatrix}$, il suffit de calculer A^n. Pour cela on va diagonaliser la matrice A.

Polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 0,95-\lambda & 0,2 \\ 0,05 & 0,8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,75\lambda + 0,75 = (\lambda - 0,75)(\lambda - 1).$$

Valeurs propres $0,75$ et 1. Deux valeurs propres distinctes, donc A diagonalisable.

Espace propre E associé à la valeur propre $0,75$:

$$\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E &\iff AV = 0,75V \\
&\iff \left\{ \begin{array}{lcll} 0,95x & + & 0,2y & = 0,75x \\ 0,05x & + & 0,8y & = 0,75y \end{array} \right. \\
&\iff x = -y \\
&\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

D'où $E = \text{Vect}(u_1)$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Espace propre E' associé à la valeur propre 1 :

$$\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E' &\iff AV = V \\
&\iff \left\{ \begin{array}{lcll} 0,95x & + & 0,2y & = x \\ 0,05x & + & 0,8y & = y \end{array} \right. \\
&\iff x = 4y \\
&\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où $E' = \text{Vect}(u_2)$ avec $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0,75 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. Or

$$D^n = \begin{pmatrix} 0,75^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,75^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad PD^n = \begin{pmatrix} 0,75^n & 4 \\ -0,75^n & 1 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0,75^n + 4 & -4 \times 0,75^n + 4 \\ -0,75^n + 1 & 4 \times 0,75^n + 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $X_n = A^n X_0$, on en déduit que :

$$a_n = \frac{(0,75^n + 4)a_0 + (-4 \times 0,75^n + 4)b_0}{5} = \frac{250000(0,75^n + 4) + 750000(-4 \times 0,75^n + 4)}{5},$$

c'est-à-dire

$$a_n = 50000(0,75^n + 4) + 150000(-4 \times 0,75^n + 4),$$

et

$$b_n = \frac{(-0,75^n + 1)a_0 + (4 \times 0,75^n + 1)b_0}{5} = \frac{250000(-0,75^n + 1) + 750000(4 \times 0,75^n + 1)}{5},$$

c'est-à-dire

$$b_n = 50000(-0,75^n + 1) + 150000(4 \times 0,75^n + 1).$$

En simplifiant un peu, on obtient

$$a_n = 50000(16 - 11 \times 0,75^n),$$

et

$$b_n = 50000(4 + 11 \times 0,75^n).$$

3. Que se passe-t-il lorsque n tend vers $+\infty$? Vers quoi tendent les populations de X et Y ?
   Puisque $0 < 0,75 < 1$, l'expression $0,75^n$ tend vers 0. On constate donc que la population de X, a_n, tend vers $50000 \times 16 = 800000$ et que la population de Y, b_n, tend vers $50000 \times 4 = 200000$.

Système différentiel

On termine par une application qui fait appel à la diagonalisation de matrices carrées de taille 2 (on aurait aussi pu trouver un exemple du même genre avec une matrice carrée de taille 3 !). Il s'agit des systèmes différentiels qui généralisent la notion d'équations différentielles.

On souhaite résoudre le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x' & = & 2x & + & 3y \\ y' & = & x & + & 4y \end{array}\right.$$

où les inconnues $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$ sont deux fonctions dérivables de la variable t. Les fonctions x' et y' désignent comme d'habitude les dérivées de x et de y. Notons

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad M' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

de sorte que le système initial s'écrive $M' = AM$. En diagonalisant A, on trouve $P^{-1}AP = D$ où

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Le système initial (qui s'écrit $M' = AM$) devient $M' = PDP^{-1}M$, c'est-à-dire $P^{-1}M' = DP^{-1}M$.

Posons $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^{-1}M$. On a donc $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Étant donné que $P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 3X - Y \\ y & = & X + Y \end{array}\right.,$$

ce qui donne en dérivant les fonctions par rapport à la variable t :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x' & = & 3X' - Y' \\ y' & = & X' + Y' \end{array}\right..$$

Ainsi on vient de montrer que

$$M' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}, \text{ et donc} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = P^{-1}M'.$$

Par conséquent le système à résoudre $P^{-1}M' = DP^{-1}M$ est en fait

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ 5Y \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{ccc} X' & = & X \\ Y' & = & 5Y \end{array}\right., \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{ccc} X & = & \alpha e^{t} \\ Y & = & \beta e^{5t} \end{array}\right.,$$

où α et β sont des constantes réelles quelconques. On obtient alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha e^{t} \\ \beta e^{5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha e^{t} - \beta e^{5t} \\ \alpha e^{t} + \beta e^{5t} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{ccc} x(t) & = & 3\alpha e^{t} - \beta e^{5t} \\ y(t) & = & \alpha e^{t} + \beta e^{5t} \end{array}\right.$$