I.U.T. de Brest
Département GMP

Mathématiques

Compléments sur les équations différentielles

Équations différentielles non linéaires

Avertissement. Jusqu'à maintenant, nous nous sommes intéressés aux équations différentielles linéaires, et tout particulièrement à celles d'ordre 1 et à celles d'ordre 2 à coefficients constants. Cependant, certains problèmes physiques, notamment en Mécanique, débouchent sur des équations différentielles non linéaires. Malheureusement, il n'existe pas de méthodes générales pour résoudre de telles équations. En pratique, des solutions numériques reposant sur des logiciels de calculs peuvent apporter des réponses mais nous entrons là dans des domaines des mathématiques qui demandent un tout autre niveau que celui de GMP.

Dans ce qui suit, nous allons traiter d'équations différentielles non linéaires particulières pour lesquelles nous disposons de méthodes de résolution. Nous allons donc nous intéresser aux :
— équations différentielles à variables séparables ;
— équations différentielles de Bernoulli ;
— équations différentielles de Ricatti ;
— équations différentielles homogènes.

Enfin, dans ce qui suit, nous allons insister sur l'aspect calculatoire des résolutions de certaines équations différentielles non linéaires. Il est important de savoir que nous devrions davantage insister sur l'aspect rigoureux de telles résolutions (existence des solutions, ensemble de définition des solutions...), mais cela demanderait de proposer un cours bien plus détaillé et bien plus théorique. Pour ceux que cela intéresse, il est fortement recommandé de rechercher des infos sur le problème de Cauchy et sur le théorème de Cauchy-Lipschitz (comme d'habitude, Google est votre ami !).

Équations différentielles à variables séparables

On appelle *équation différentielle à variables séparables* une équation différentielle du premier ordre de la forme

$$y'f(y) = g(x),$$

ou encore, si l'on utilise la notation $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pour la dérivée y',

$$f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ces équations sont particulièrement simples à résoudre dès que l'on connaît une primitive F de f et une primitive G de g. En effet d'après le théorème de dérivation des fonctions composées, l'équation $y'f(y) = g(x)$ s'écrit $F(y)' = G'$. Comme les fonctions $F \circ y$ et G ont la même dérivée, elles sont égales à une constante près. Autrement dit, on peut écrire $F(y(x)) = G(x) + c$ qui n'est plus une équation différentielle mais une simple équation dont on doit tirer y.

Exemple 1. Les équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre ($y' + a(x)y = 0$) sont des équations différentielles à variables séparables.

Exemple 2. Résolvons l'équation $y' = \mathrm{e}^{x+y}$.
Cette équa. diff. s'écrit aussi $y' = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y$, ce qui revient à écrire $y'\,\mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^x$.
En adoptant la notation différentielle, on obtient $\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ et donc $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$,
c'est-à-dire $-\,\mathrm{e}^{-y} = \mathrm{e}^x + c$, où c est une constante réelle.
Notons que c est une constante strictement négative puisque $c = -\,\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^x$.
En posant $K = -c$ ($K > 0$) et en passant au logarithme, on obtient

$$y = -\ln(K - \mathrm{e}^x).$$

Les solutions sont donc les fonctions définies sur $]-\infty; \ln K[$ par $y = -\ln(K - \mathrm{e}^x)$, où K est une constante strictement positive.

Exemple 3. On cherche la solution particulière de l'équation $y' = -x(y-1)^2$ définie sur $\left]-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ et vérifiant la condition initiale $y(0) = -3$.
Après intégration, on obtient $\dfrac{1}{y-1} = \dfrac{x^2}{2} + c$, où c est une constante réelle.
Cela permet d'obtenir $y = 1 + \dfrac{2}{x^2 + 2c}$.
La condition initiale $y(0) = -3$ force $c = -\frac{1}{4}$.
D'où $y = 1 + \dfrac{4}{2x^2 - 1}$.

Exemple 4. Résolution de l'équation $y' - 2xy^2 = 2x$.

On écrit d'abord $y' = 2xy^2 + 2x$, ce qui donne $y' = 2x(y^2 + 1)$. D'où $\dfrac{y'}{y^2+1} = 2x$. Ainsi, après intégration, on obtient $\arctan(y) = x^2 + c$ avec c une constante réelle. Cela donne finalement $y = \tan(x^2 + c)$.

Équations différentielles de Bernoulli

Une *équation de Bernoulli* est une équa. diff. de la forme

$$y' = a(x) \times y + b(x) \times y^m$$

où les fonctions a et b sont continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, et le réel m est différent de 0 et de 1.

Méthode de résolution. On définit la fonction

$$u = \frac{1}{y^{m-1}} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad u(x) = \frac{1}{(y(x))^{m-1}}$$

puis on cherche l'équa. diff. vérifiée par u. Cette équa. diff. en u est forcément linéaire, et nous devrions donc savoir la résoudre...

Exemple. Résolution de l'équa. diff. $y' + 2y = 4xy^2$.

On pose $u = \dfrac{1}{y^{2-1}} = \dfrac{1}{y}$. Dans ce cas, $y = \dfrac{1}{u}$. En dérivant, on obtient $y' = -\dfrac{u'}{u^2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} y' + 2y = 4xy^2 \text{ ssi } & -\frac{u'}{u^2} + 2 \times \frac{1}{u} = 4x \times \frac{1}{u^2} \\ \text{ssi } & -u' + 2u = 4x \\ \text{ssi } & u' - 2u = -4x. \end{aligned}$$

Cette dernière équa. diff. en u est bien linéaire et on sait la résoudre de façon classique. Après calculs, on trouve $u(x) = \lambda\, \mathrm{e}^{2x} + 2x + 1$ avec λ une constante réelle. Par conséquent,

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\lambda\, \mathrm{e}^{2x} + 2x + 1}.$$

Remarque importante. En fait, la fonction nulle $y = 0$ est aussi solution de l'équa. diff. $y' + 2y = 4xy^2$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (Google est votre ami si vous voulez creuser la question...), on est sûr que les solutions autres que la solution nulle ne s'annulent pas, ce qui fait qu'on peut effectivement poser $u = \dfrac{1}{y^{2-1}} = \dfrac{1}{y}$ et continuer le raisonnement.

De plus, en toute rigueur, on se doit aussi de réfléchir à l'ensemble de définition des solutions définies par

$$y(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{1}{\lambda\, \mathrm{e}^{2x} + 2x + 1}.$$

Équations différentielles de Ricatti

Une *équation de Ricatti* est une équa. diff. de la forme

$$y' = a(x) + b(x) \times y + c(x) \times y^2$$

où les fonctions a, b et c sont continues sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Méthode de résolution. La méthode décrite est uniquement valable si on connaît une solution particulière y_P de l'équation initiale. Dans ce cas, on pose $y = y_P + u$ et on cherche l'équa. diff. vérifiée par la fonction u. Il se trouve qu'on obtient alors une équation de Bernoulli et qu'on est ramené au cas précédent.

Exemple. Résolution sur $]0; +\infty[$ de l'équa. diff. $x^3y' + y^2 + x^2y + 2x^4 = 0$.

Il s'agit bien d'une équation de Ricatti. Nous pouvons remarquer qu'elle admet $y_P = -x^2$ pour solution particulière.

On pose donc $y = y_P + u = u - x^2$. On a donc $y' = u' - 2x$. Ainsi

$$\begin{aligned} x^3y' + y^2 + x^2y + 2x^4 = 0 \quad &\text{ssi} \quad x^3(u' - 2x) + (u - x^2)^2 + x^2(u - x^2) + 2x^4 = 0 \\ &\text{ssi} \quad x^3u' - 2x^4 + u^2 - 2x^2u + x^4 + x^2u - x^4 + 2x^4 = 0 \\ &\text{ssi} \quad x^3u' + u^2 - x^2u = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équa. diff. en u est une équation de Bernoulli avec $m = 2$. On pose donc $w = \dfrac{1}{u^{2-1}} = \dfrac{1}{u}$.

Dans ce cas, $u = \dfrac{1}{w}$. En dérivant, on obtient $u' = -\dfrac{w'}{w^2}$. Ainsi

$$\begin{aligned} x^3u' + u^2 - x^2u = 0 \text{ ssi } &-x^3 \times \frac{w'}{w^2} + \frac{1}{w^2} - x^2 \times \frac{1}{w} = 0 \\ \text{ssi } &-x^3w' + 1 - x^2w = 0 \\ \text{ssi } &x^3w' + x^2w = 1. \end{aligned}$$

Cette dernière équa. diff. en w est bien linéaire et on sait la résoudre de façon classique sur $]0; +\infty[$. En utilisant notamment la méthode de variation de la constante, on trouve après calculs

$$w(x) = \lambda \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{\lambda x - 1}{x^2}$$

avec λ une constante réelle. Par conséquent,

$$u(x) = \frac{1}{w(x)} = \frac{x^2}{\lambda x - 1}\cdot$$

Finalement

$$y = y_P + u = u - x^2 = \frac{x^2}{\lambda x - 1} - x^2 = \frac{x^2 - x^2(\lambda x - 1)}{\lambda x - 1} = \frac{x^2(1 - \lambda x + 1)}{\lambda x - 1} = x^2 \times \frac{2 - \lambda x}{\lambda x - 1}\cdot$$

Équations différentielles homogènes

Une équa. diff. d'ordre 1 est dite *homogène de degré n* si elle peut s'écrire sous la forme

$$y' = f(x, y)$$

où f est une fonction homogène de degré n, c'est-à-dire vérifiant

$$f(kx, ky) = k^n \times f(x, y).$$

Méthode de résolution lorsque $\mathbf{n = 0}$. On définit la fonction

$$u = \frac{y}{x} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

puis on cherche l'équa. diff. vérifiée par la fonction u. Il se trouve qu'on obtient alors une équa. diff. à variables séparables que nous devrions savoir résoudre.

Exemple. Résolution de l'équa. diff. $y' = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$.

Ici on a $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$. Or

$$f(kx, ky) = \frac{(kx) \times (ky)}{(kx)^2 - (ky)^2} = \frac{k^2xy}{k^2x^2 - k^2y^2} = \frac{k^2xy}{k^2(x^2 - y^2)} = \frac{xy}{x^2 - y^2} = k^0 \times f(x, y).$$

On pose $u = \dfrac{y}{x}$. On a donc $y = xu$ puis, en dérivant comme un produit, $y' = 1 \times u + x \times u' = u + xu'$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
y' = \frac{xy}{x^2 - y^2} \quad & \text{ssi} \quad u + xu' = \frac{x^2u}{x^2 - x^2u^2} \\
& \text{ssi} \quad u + xu' = \frac{u}{1 - u^2} \\
& \text{ssi} \quad xu' = \frac{u}{1 - u^2} - u \\
& \text{ssi} \quad xu' = \frac{u^3}{1 - u^2} \\
& \text{ssi} \quad \frac{1 - u^2}{u^3} \times u' = \frac{1}{x} \\
& \text{ssi} \quad \frac{u'}{u^3} - \frac{u'}{u} = \frac{1}{x} \\
& \text{ssi} \quad -\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + c \quad \text{avec } c \text{ une constante réelle} \\
& \text{ssi} \quad -\frac{1}{2u^2} = \ln|u| + \ln|x| + c \quad \text{avec } c \text{ une constante réelle} \\
& \text{ssi} \quad -\frac{1}{2u^2} = \ln|xu| + c \quad \text{avec } c \text{ une constante réelle.}
\end{aligned}$$

On revient à x et y en utilisant $u = \dfrac{y}{x}$. On obtient alors :

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|y| + c.$$

Comme il est difficile d'isoler y en fonction de x, on préfère ici exprimer x en fonction de y :

$$x^2 = -2y^2(\ln|y| + c)$$

puis finalement

$$x = y\sqrt{-2(\ln|y| + c)}\ .$$