Compléments sur les intégrales simples

Intégrales généralisées (ou impropres)

Pour trouver des informations encore plus complètes, on pourra consulter le site :

http://exo7.emath.fr/cours/ch_intimp.pdf

1. Généralités

Si f est une fonction continue définie non pas sur un segment $[a;b]$ mais sur un intervalle ouvert $]a;b[$ – avec éventuellement $a=-\infty$ ou $b=+\infty$ –, on va montrer qu'il est parfois (mais pas toujours) possible de donner un sens à l'*intégrale généralisée* ou *impropre* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

► Commençons par étudier le cas d'un intervalle semi-ouvert à droite $[a;b[$. Considérons alors f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b[$. Pour tout réel x tel que $a<x<b$ (ou simplement $a<x$ si $b=+\infty$), la fonction f est continue sur le segment $[a;x]$ et on peut donc calculer $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

> Si l'expression $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie ℓ quand x tend vers b,
> on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, ou qu'elle est *convergente*, et sa valeur est ℓ.
> Dans le cas contraire, on parle d'intégrale *divergente*.

Exemple 1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
Si $x>1$, on a $\displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x = \mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-x}$, et l'expression tend vers e^{-1} lorsque x tend vers $+\infty$.
On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

Exemple 2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ est-elle convergente ?
Si $x>1$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_1^x = -\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}$, et l'expression tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ est convergente et que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{2}$.

Exemple 3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est-elle convergente ?
Si $x>1$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = [\ln t]_1^x = \ln x$, et l'expression tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
On en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente.

Exemple fondamental. Intégrales de Riemann.

> Si α est un nombre réel, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente pour $\alpha>1$, et divergente si $\alpha\leqslant 1$.

Exemple 4. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{\mathrm{d}t}{t-3}$ est-elle convergente ?

Si $1 < x < 3$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t-3} = [\ln|t-3|]_1^x = \ln(3-x) - \ln 2$, et l'expression tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 3. On en déduit que $\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t-3}$ est divergente.

► Étudions maintenant le cas d'un intervalle semi-ouvert à gauche $]a;b]$. Considérons alors f une fonction continue sur l'intervalle $]a;b]$ et procédons de manière analogue au cas précédent. Pour tout réel x tel que $a < x < b$ (ou simplement $x < b$ si $a = -\infty$), la fonction f est continue sur le segment $[x;b]$ et on peut donc calculer $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

> Si l'expression $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie ℓ quand x tend vers a,
> on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, ou qu'elle est *convergente*, et sa valeur est ℓ.
> Dans le cas contraire, on parle d'intégrale *divergente*.

Exemple 5. $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Si $0 < x < 1$, on a en intégrant par parties $\displaystyle\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = [t\ln t]_x^1 - \int_x^1 \frac{1}{t}\times t\,\mathrm{d}t = -x\ln x - [t]_x^1 = -x\ln x - 1 + x$, et l'expression tend vers -1 lorsque x tend vers 0. En effet rappelons que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = -1$.

Exemple 6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est-elle convergente ?

Si $0 < x < 1$, on a $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}$, et l'expression tend vers 2 lorsque x tend vers 0.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ est convergente et que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2$.

Exemple fondamental. Intégrales de Riemann.

> Si α est un nombre réel, alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente pour $\alpha < 1$, et divergente si $\alpha \geqslant 1$.

► Enfin, traitons le cas où l'intervalle d'étude $]a;b[$ est ouvert à gauche et à droite. Considérons f une fonction continue sur $]a;b[$.

> On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *convergente* s'il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont toutes les deux convergentes.
>
> Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est-elle convergente ?

Pour $x > 0$ on a $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_0^x = \arctan x$. Lorsque $x \to +\infty$, l'expression précédente tend vers $\frac{\pi}{2}$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Pour $x < 0$ on a $\displaystyle\int_x^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_x^0 = -\arctan x$. Lorsque $x \to -\infty$, l'expression précédente tend vers $-(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente, et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ est convergente, et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$.

Exemple 8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2t\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Pour tout réel c, on a $\displaystyle\int_c^x 2t\,\mathrm{d}t = [t^2]_c^x = x^2 - c^2$. Lorsque $x \to +\infty$, l'expression $x^2 - c^2$ tend vers $+\infty$.

Par conséquent $\displaystyle\int_c^{+\infty} 2t\,\mathrm{d}t$ est divergente, et donc aussi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2t\,\mathrm{d}t$.

Remarque. Il faut prendre garde au fait que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2t\,\mathrm{d}t$ est divergente bien que pour tout réel x on ait $\displaystyle\int_{-x}^{x} 2t\,\mathrm{d}t = 0$, et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} 2t\,\mathrm{d}t = 0$. Il faut donc bien considérer les deux bornes indépendamment l'une de l'autre.

2. Critères de convergence

Il n'est pas toujours possible de calculer une primitive de la fonction à intégrer. Cependant on dispose de différents critères pour dire si l'intégrale impropre considérée est convergente ou pas.

a. Comparaison de fonctions positives

Considérons deux fonctions f et g, continues, positives sur $[a;b[$ et telles que $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a;b[$.

- Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Exemple 9. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

On sait que pour tout réel $t \geqslant 1$, on a $1+t \geqslant 1$ donc $t^2(1+t) \geqslant t^2 > 0$. Ainsi $0 < \frac{1}{t^2(1+t)} \leqslant \frac{1}{t^2}$. Mais on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge puisque $2 > 1$ (voir l'un des exemples fondamentaux).

À l'aide du critère précédent on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Remarque. Le critère précédent permet de montrer l'existence de l'intégrale, mais il ne donne aucune piste sur comment la calculer. Sur l'exemple 9, on peut en fait déterminer une primitive de la fonction. Pour cela il s'agit de remarquer que

$$\frac{1}{t^2(1+t)} = \frac{(1-t^2)+t^2}{t^2(1+t)} = \frac{(1-t)(1+t)}{t^2(1+t)} + \frac{1}{1+t} = \frac{1-t}{t^2} + \frac{1}{1+t} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t}$$

Par conséquent, pour $x > 1$, on obtient

$$\int_1^x \frac{1}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t} - \ln t + \ln(1+t)\right]_1^x = \left[-\frac{1}{t} + \ln\left(\frac{1+t}{t}\right)\right]_1^x = -\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) + 1 - \ln 2.$$

Or cette dernière expression tend vers $1 - \ln 2$ lorsque x tend vers $+\infty$. D'où

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t = 1 - \ln 2.$$

Exemple 10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

S'il y a problème de convergence, cela ne peut venir que lorsque $t \to +\infty$; il suffit donc de s'assurer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. L'avantage de prendre $t \geqslant 1$, c'est que, dans ce cas, $t^2 \geqslant t$. Donc $-t^2 \leqslant -t$, et comme l'exponentielle est croissante, $\mathrm{e}^{-t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$.

Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est convergente (voir exemple 1), on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

En revanche le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ n'est pas si évident. On peut par exemple y arriver à partir d'une intégrale double (voir maths du semestre 3). En fait $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On pourra faire le lien avec la loi normale en Probabilités (voir maths du semestre 1).

Exemple 11. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
Pour tout réel $t \geqslant 2$, on a $0 < \ln t \leqslant t$ donc $\frac{1}{\ln t} \geqslant \frac{1}{t} > 0$.
Mais on sait que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge (voir exemple 3).
À l'aide du critère précédent on en déduit que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ est divergente.

b. Équivalence de fonctions positives

Considérons deux fonctions f et g continues et positives sur $[a;b[$.

Supposons que f et g soient équivalentes au voisinage de b, c'est-à-dire $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, c'est-à-dire encore $\displaystyle\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Cela signifie que :

- Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
- Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.

Attention. Il est essentiel d'avoir deux fonctions de même signe sur $[a;b[$.

Exemple 12. Reprenons l'exemple 9 vu plus haut : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
On a $1+t \underset{+\infty}{\sim} t$, donc $t^2(1+t) \underset{+\infty}{\sim} t^3$. Ainsi $\frac{1}{t^2(1+t)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$.
Mais on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,\mathrm{d}t$ converge car $3 > 1$ (exemple fondamental des intégrales de Riemann).
Il ne reste plus qu'à appliquer le critère encadré plus haut pour obtenir la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2(1+t)}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 13. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2(t^2+t+1)}{t^3+2}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
On a $\frac{t^2(t^2+t+1)}{t^3+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{t^2\times t^2}{t^3}$, donc $\frac{t^2(t^2+t+1)}{t^3+2} \underset{+\infty}{\sim} t$. Ainsi $\frac{t^2(t^2+t+1)}{t^3+2}\,\mathrm{e}^{-t} \underset{+\infty}{\sim} t\,\mathrm{e}^{-t}$.
À l'aide d'une intégration par parties, on a :

$$\int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = [-t\,\mathrm{e}^{-t}]_0^x - \int_0^x (-\,\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = -x\,\mathrm{e}^{-x} - [\mathrm{e}^{-t}]_0^x = -x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} + 1,$$

la dernière expression tendant vers 1 quand $x \to +\infty$. Autrement dit, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.
En appliquant le critère encadré plus haut, on obtient la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2(t^2+t+1)}{t^3+2}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

c. Absolue convergence

Considérons f une fonction continue sur un intervalle $]a;b[$.
On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est *absolument convergente* si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

> Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.
> Dans ce cas, $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

Exemple 14. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
On sait que pour tout réel $t \geqslant 1$, on a $|\sin t| \leqslant 1$, donc $\displaystyle\left|\frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{1}{t\sqrt{t}}$.
Or $\displaystyle\frac{1}{t\sqrt{t}} = \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est convergente puisque $\frac{3}{2} > 1$ (voir l'un des exemples fondamentaux). En utilisant le critère de convergence de comparaison des fonctions positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
Il ne reste plus qu'à appliquer le critère encadré plus haut pour obtenir la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.