
Attention ! Ci-dessous en noir la correction du devoir, et en bleu mes commentaires pour montrer que les arguments ou raisonnements vus en TD permettaient largement de répondre aux questions du devoir...

Exercice 1 ($\simeq 6$ points).

- Calcul de $A = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2-2}{\sqrt{x^3-6x+4}}\,\mathrm{d}x$:

On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ est $2\sqrt{u}$.

En posant ici $u(x) = x^3 - 6x + 4$, on a donc $u'(x) = 3x^2 - 6 = 3(x^2-2)$ et on peut écrire en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$A = \frac{1}{3} \times \int_{-1}^{0} \frac{3(x^2-2)}{\sqrt{x^3-6x+4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \left[2\sqrt{x^3-6x+4}\right]_{-1}^{0} = \frac{2}{3} \times \left[\sqrt{x^3-6x+4}\right]_{-1}^{0}.$$

D'où

$$A = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{4} - \sqrt{9}\right) = \frac{2}{3} \times (2-3) = -\frac{2}{3}.$$

Commentaire : A du même type que $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$ dans l'exercice 1 de la feuille n° 3 de TD.

- Calcul de $B = \displaystyle\int_1^3 \frac{6+5x-2x^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$: on a $B = \displaystyle\int_1^3 \left(\frac{6}{x^2} + \frac{5}{x} - 2\right)\mathrm{d}x$.

Par linéarité, $B = 6 \times \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + 5 \times \int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^3 2\,\mathrm{d}x$.

► On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $\dfrac{-1}{u}$.

En posant ici $u(x) = x$, on a donc $u'(x) = 1$ et on peut écrire :

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^3 = \frac{-1}{3} - \frac{-1}{1} = \frac{2}{3}.$$

► On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

En posant ici $u(x) = x$, on a donc $u'(x) = 1$ et on peut écrire :

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln|x|]_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3.$$

► Conclusion. On obtient finalement :

$$B = 6 \times \frac{2}{3} + 5 \times \ln 3 - [2x]_1^3 = 4 + 5\ln 3 - (6-2) = 5\ln 3.$$

Commentaire : B avec une fraction à simplifier, puis application directe du tableau des primitives.

- On connait l'identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Donc ici $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ et :

$$C = \int_{-3}^{-2} \frac{3}{x^2 + 2x + 1}\,\mathrm{d}x = 3 \times \int_{-3}^{-2} \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Puisqu'une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $-\dfrac{1}{u}$ (ici $u(x) = x+1$ et donc $u'(x) = 1$), on a :

$$C = 3 \times \left[\frac{-1}{x+1}\right]_{-3}^{-2} = 3\left(\frac{-1}{-1} - \frac{-1}{-2}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

Commentaire : C du même type que J_4 dans l'exercice 3 de la feuille n° 4 de TD : après avoir effectué le changement de variable dans J_4, on se retrouvait à intégrer exactement $\dfrac{1}{t^2 + 2t + 1}$.

Exercice 2 ($\simeq 4$ points). Calcul de $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin(3x)\,\mathrm{d}x$:

Par IPP : on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(3x) = \frac{1}{3} \times 3\sin(3x)$.

Alors $u'(x) = 1$ et, puisqu'une primitive de $w' \sin w$ est $-\cos w$, on prend $v(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$ en ayant posé $w(x) = 3x$.

D'où, en appliquant la formule d'IPP $\displaystyle\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$, on obtient :

$$I = \left[-\frac{x\cos(3x)}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{-1}{3}\cos(3x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi

$$I = -\frac{\pi\cos(3\pi)}{3} + \frac{\pi\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{6} + \frac{1}{3} \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(3x)\,\mathrm{d}x.$$

Comme une primitive de $w'\cos w$ est $\sin w$, on obtient en posant $w(x) = 3x$:

$$I = \frac{\pi}{3} + 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3\cos(3x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9} \times [\sin(3x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9} \times \left(\sin(3\pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

D'où

$$I = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9} \times (0 - (-1)) = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9}.$$

Commentaire : I du même type que la seconde intégrale $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$ du (a) de l'exercice 1 de la feuille n° 4 de TD. Sans oublier l'intégration de $\sin(7t)$ à l'exercice 4 feuille 3. Autre point de vue : I quasi identique à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(3x)\,\mathrm{d}x$ traitée dans la vidéo pour illustrer l'IPP sur ma chaine YouTube.

Exercice 3 ($\simeq 5$ points). Calcul de $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} (2 - \cos(2x))^2 \, \mathrm{d}x$.

En utilisant l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, on obtient :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(4 - 4\cos(2x) + \cos^2(2x)\right) \mathrm{d}x,$$

ce qui donne par linéarité :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{8}} 4 \, \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{8}} 4\cos(2x) \, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2(2x) \, \mathrm{d}x.$$

- Calcul de $J_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} 4 \, \mathrm{d}x$. On a $J_1 = [4x]_0^{\frac{\pi}{8}} = \dfrac{\pi}{2}$.
- Calcul de $J_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} 4\cos(2x) \, \mathrm{d}x$.

  On sait qu'une primitive de $u' \cos u$ est $\sin u$.

  En posant ici $u(x) = 2x$, on a donc $u'(x) = 2$ et on peut écrire :

$$J_2 = 2 \times \int_0^{\frac{\pi}{8}} 2\cos(2x) \, \mathrm{d}x = 2 \times [\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{8}} = 2 \times \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin 0\right) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \sqrt{2}.$$

- Calcul de $J_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2(2x) \, \mathrm{d}x$.

  On a $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$. En prenant $a = 2x$, on obtient $\cos(4x) = 2\cos^2(2x) - 1$. D'où

$$\cos^2(2x) = \frac{\cos(4x) + 1}{2} = \frac{1}{2} \times (\cos(4x) + 1).$$

Remarque. On aurait aussi pu utiliser la formule donnant $\cos a \times \cos b$, avec $a = b = 2x$, pour obtenir l'égalité précédente.

On peut donc écrire par linéarité :

$$J_3 = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{2} \times (\cos(4x) + 1) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \int_0^{\frac{\pi}{8}} (\cos(4x) + 1) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos(4x) \, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{8}} 1 \, \mathrm{d}x\right)$$

Donc

$$J_3 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times \int_0^{\frac{\pi}{8}} 4\cos(4x) \, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{8}} 1 \, \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times [\sin(4x)]_0^{\frac{\pi}{8}} + [x]_0^{\frac{\pi}{8}}\right)$$

D'où

$$J_3 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0\right) + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times (1 - 0) + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{8} + \frac{\pi}{16}.$$

- Conclusion. On obtient finalement :

$$J = J_1 - J_2 + J_3 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{8} + \frac{\pi}{16} = \frac{9\pi}{16} - \sqrt{2} + \frac{1}{8}.$$

Commentaire : exercice très proche des TD car, en TD, on a intégré $(2 + \sin x)^2$ (à l'exercice 5 de la feuille n° 3) ainsi que $\sin(7t)$ et $\cos^2(2t)$ (à l'exercice 4 feuille 3).

Exercice 4 ($\simeq 5$ points). À l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x+1}$, calcul de l'intégrale :

$$K = \int_{-\frac{8}{9}}^{0} \frac{1}{(3x+4)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x\,.$$

- Bornes : si $x = -\dfrac{8}{9}$ alors $t = \sqrt{-\dfrac{8}{9}+1} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$.

De même si $x = 0$ alors $t = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$.

- Fonction : comme $t = \sqrt{x+1}$, on a $t^2 = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = x+1$, et donc $x = t^2-1$. Alors

$$3x+4 = 3(t^2-1)+4 = 3t^2-3+4 = 3t^2+1$$

et donc :

$$f(x) = \frac{1}{(3x+4)\sqrt{x+1}} = \frac{1}{(3t^2+1)t}.$$

- Différentielle : on a $x = t^2-1$. En dérivant x par rapport à t, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$.

On en déduit que $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$.

- Conclusion. On applique la formule de changement de variable :

$$K = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{(3t^2+1)t} \times 2t\,\mathrm{d}t = 2 \times \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{3t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule $\frac{u'}{1+u^2}$ pour calculer la dernière intégrale. Pour cela, on écrit :

$$\frac{1}{3t^2+1} = \frac{1}{(t\sqrt{3})^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{(t\sqrt{3})^2+1}$$

Alors

$$K = 2 \times \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{3t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\sqrt{3}}{(t\sqrt{3})^2+1}\,\mathrm{d}t$$

On peut bien appliquer la formule $\frac{u'}{1+u^2}$ en posant $u(t) = t\sqrt{3}$ (et donc $u'(t) = \sqrt{3}$) ; on obtient alors :

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \left[\arctan\left(t\sqrt{3}\right)\right]_{\frac{1}{3}}^{1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \left[\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$K = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

Commentaire : le calcul de K commence par un changement de variable comme dans l'exercice 3 de la feuille n° 4 de TD (d'ailleurs il fallait poser $t = \sqrt{x}$ pour J_2) ; ici, pour calculer K, il faut ensuite penser à la formule $\frac{u'}{1+u^2}$... Par ailleurs, pour ceux qui avait eu le courage de faire le devoir de 2019/20, K était très très proche de l'exercice 3.

Fin du corrigé.