I.U.T. de Brest — Année 2019-2020
G.M.P. 1 — Corrigé du devoir du 28/11/2019
Outils mathématiques (M1301)

Exercice 1 ($\simeq 10$ points). On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)^2(1-x).$$

1. $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = (x+2)^2$ et $v(x) = 1-x$.
   On a $u'(x) = 2 \times 1 \times (x+2) = 2(x+2)$ en ayant utilisé la formule $(w^\alpha)' = \alpha w' w^{\alpha-1}$ avec $\alpha = 2$ et $w(x) = x+2$ (et donc ici $w'(x) = 1$).
   Remarque. Au pire, on développe l'identité remarquable et on dérive ensuite pour calculer $u'(x)$.

   De plus, $v'(x) = -1$.
   D'où :
   $$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 2(x+2)(1-x) + (x+2)^2 \times (-1).$$
   En factorisant par $(x+2)$:
   $$f'(x) = (x+2)[2(1-x) - (x+2)] = (x+2)[2 - 2x - x - 2] = (x+2)[-3x] = -3x(x+2).$$
   Remarque. Au pire, on développe brutalement l'expression donnant $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 4$ puis on dérive pour obtenir $f'(x) = -3x^2 - 6x$.

2. Comme on a $f'(x)$ sous forme factorisée, on va étudier le signe de $f'(x)$ en faisant un tableau de signe (au pire, pour ceux qui auraient $f'(x)$ sous la forme d'un trinôme du second degré – non factorisé –, règle du signe du trinôme à partir du discriminant et des racines...).

   Signe de $-3x$? On a $-3x > 0$ ssi $x < 0$.
   Signe de $x+2$? On a $x+2 > 0$ ssi $x > -2$.

   D'où le tableau de signes puis de variations :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

   Pour compléter les valeurs au bout des flèches, on a fait quelques calculs :
   - $f(-2) = 0^2 \times 3 = 0$.
   - $f(0) = 2^2 \times 1 = 4$.
   - Limite de $f(x)$ quand $x \longrightarrow -\infty$:

   On a $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (x+2) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (x+2)^2 = +\infty$.
   De plus, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (1-x) = +\infty$.
   Donc par produit, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
   - Limite de $f(x)$ quand $x \longrightarrow +\infty$:

   On a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (x+2)^2 = +\infty$.

De plus, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$.
Donc par produit, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. Rappelons qu'une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$.
Ici $a = -1$. Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -1 est $y = f'(-1) \times (x+1) + f(-1)$.
Or $f(-1) = 1^2 \times 2 = 2$ et $f'(-1) = 3 \times 1 = 3$.
Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -1 est $y = 3 \times (x+1) + 2$, c'est-à-dire $y = 3x+5$.

4. Pour étudier la convexité de f, on s'intéresse au signe de $f''(x)$. On rappelle que f est convexe là où f'' est positive ou nulle.
Comme $f'(x) = -3x(x+2) = -3x^2 - 6x$, on obtient immédiatement $f''(x) = -6x - 6 = -6(x+1)$.
Alors $f''(x) \geqslant 0$ ssi $-6(x+1) \geqslant 0$, ssi $x+1 \leqslant 0$, ssi $x \leqslant -1$.
Conclusion. f est convexe sur $]-\infty; -1]$.

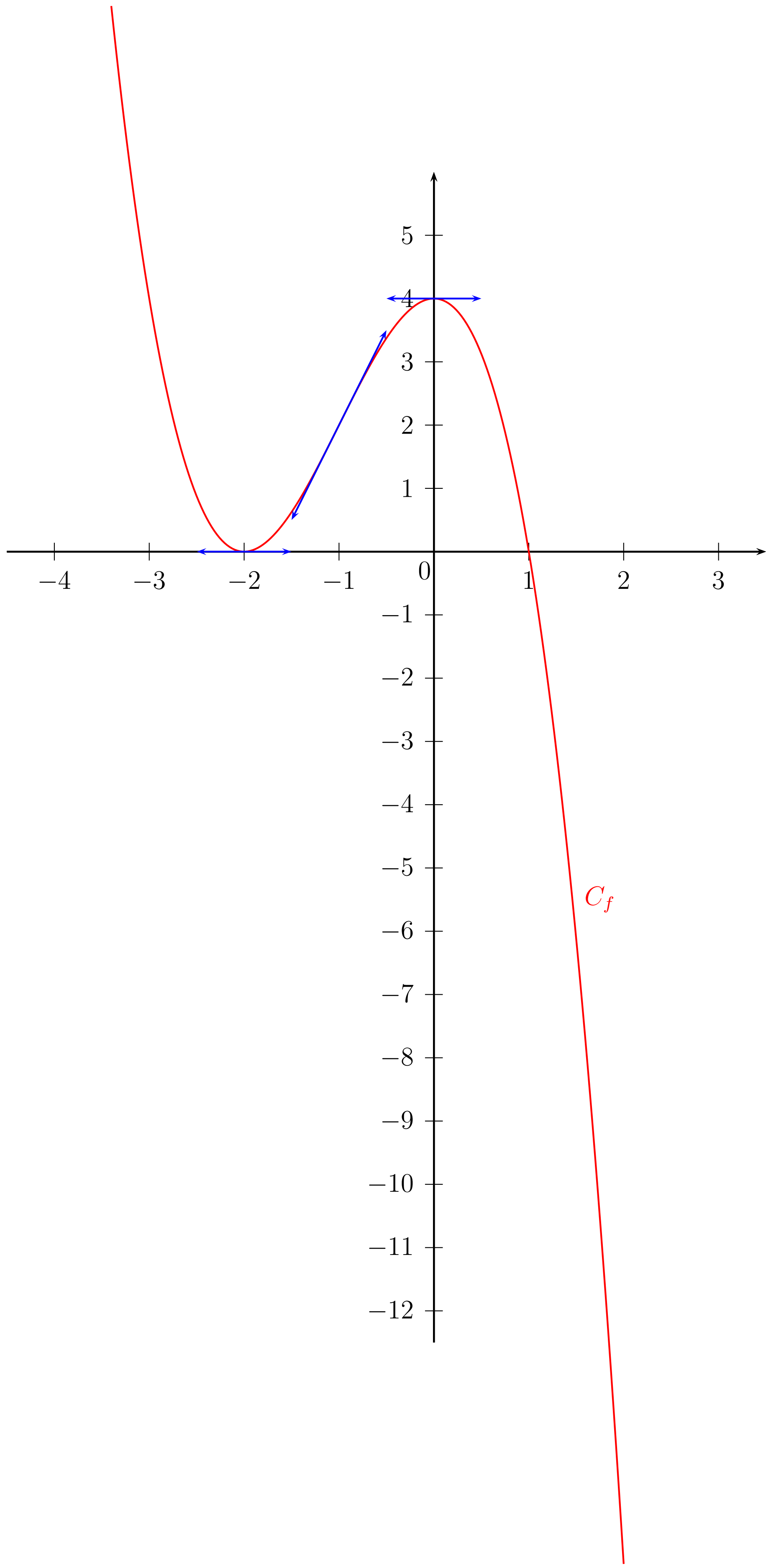
5. Les abscisses x des points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses vérifient $f(x) = 0$.
$f(x) = 0$ ssi $(x+2)^2(1-x) = 0$,
ssi $(x+2)^2 = 0$ ou $(1-x) = 0$,
ssi $x+2 = 0$ ou $x = 1$,
ssi $x = -2$ ou $x = 1$.
Les coordonnées des points d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses sont donc $(-2; 0)$ et $(1; 0)$.

6. Tracé de C_f : voir page suivante. Remarques utiles pour réaliser le tracé :
• Il y a des tangentes horizontales là où la dérivée f' s'annule ; c'est donc le cas aux points $(-2; 0)$ et $(0; 4)$.
• Au point d'abscisse -1, il y a changement de convexité. Précisément, après avoir tracé la tangente d'équation $y = 3x+5$ (obtenue à la question 3), C_f doit arriver (à gauche de -1) au-dessus de cette tangente (car f convexe sur $]-\infty; -1]$) puis C_f repart (à droite de -1) en dessous de la tangente.
• Attention aussi à maintenir une courbe concave lorsqu'on travaille sur $[1; +\infty[$: il ne faut pas chercher à faire une courbe qui part trop vite vers la droite parce que sinon on a tendance à dessiner une courbe convexe...

7. On définit la fonction g par $g(x) = \ln(f(x))$.
On sait que $\ln(t)$ est défini ssi $t > 0$. Donc $\ln(f(x))$ est défini ssi $f(x) > 0$.
D'après les questions 2 et 5 (ou d'après le tracé de la courbe de f), on peut affirmer que $f(x) > 0$ ssi $x \in]-\infty; -2[\cup]-2; 1[$.
Donc l'ensemble de définition de g est

$$D_g =]-\infty; -2[\cup]-2; 1[.$$

Tracé de la courbe de l'exercice 1.



Exercice 2 ($\simeq 3$ points).

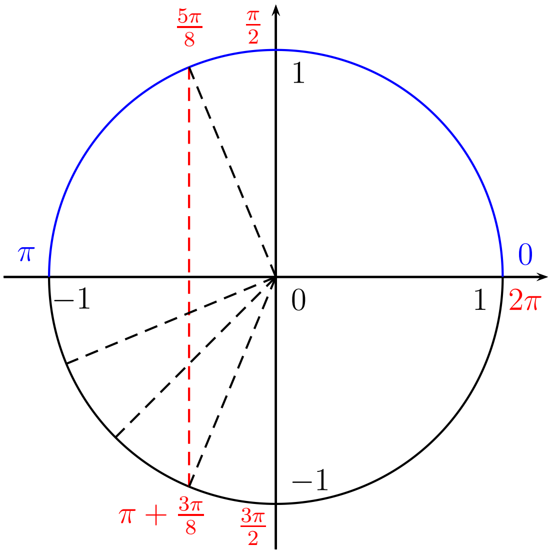
- $\alpha = \arccos\left(\cos \frac{75\pi}{8}\right)$? On a

$$\frac{75\pi}{8} = \frac{(9\times 8+3)\pi}{8} = 9\pi + \frac{3\pi}{8}.$$

Avec ce qui précède,

$$\cos\left(\frac{59\pi}{8}\right) = \cos\left(9\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(8\pi + \pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right)$$

car cosinus est 2π-périodique.



Ainsi

$$\cos\left(\frac{75\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{8}\right).$$

Par conséquent,

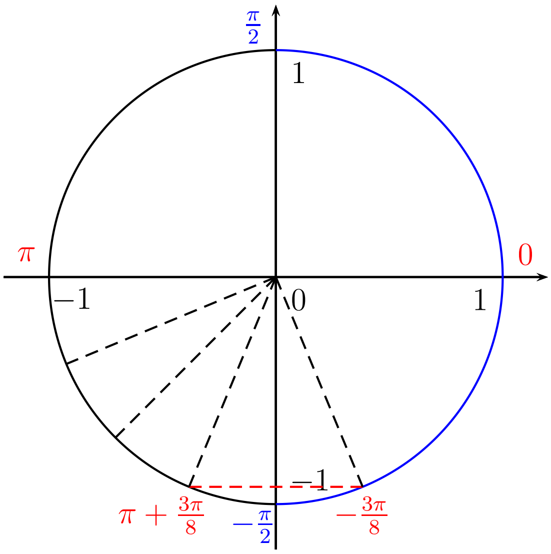
$$\alpha = \arccos\left(\cos\frac{75\pi}{8}\right) = \arccos\left(\cos\frac{5\pi}{8}\right) = \frac{5\pi}{8},$$

car $\frac{5\pi}{8} \in [0;\pi]$ et on sait que pour tout $x \in [0;\pi]$ on a $\arccos(\cos x) = x$.

- $\beta = \arcsin\left(\sin\frac{75\pi}{8}\right)$? En utilisant le résultat vu précédemment, on a

$$\sin\left(\frac{75\pi}{8}\right) = \sin\left(9\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(8\pi + \pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right)$$

car sinus est 2π-périodique.



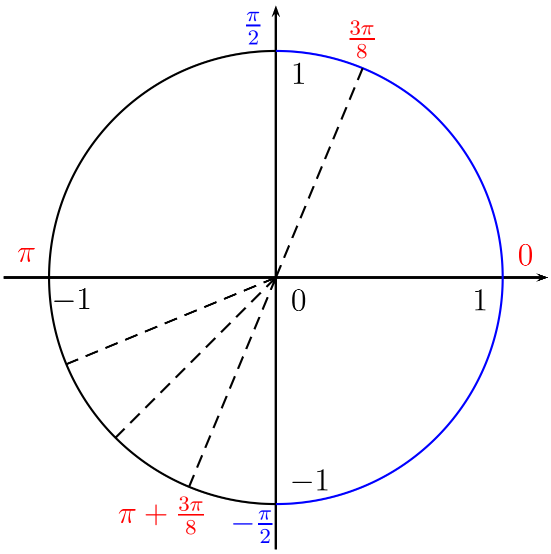
Ainsi
$$\sin\left(\frac{75\pi}{8}\right) = \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right).$$

Par conséquent,
$$\beta = \arcsin\left(\sin\frac{75\pi}{8}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{8}\right)\right) = -\frac{3\pi}{8},$$

car $-\frac{3\pi}{8} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et on sait que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ on a $\arcsin(\sin x) = x$.

• $\gamma = \arctan\left(\tan\frac{75\pi}{8}\right)$? En utilisant le résultat vu précédemment, on a
$$\tan\left(\frac{75\pi}{8}\right) = \tan\left(9\pi + \frac{3\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

car la fonction tangente est π-périodique.



Par conséquent,
$$\gamma = \arctan\left(\tan\frac{75\pi}{8}\right) = \arctan\left(\tan\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{3\pi}{8},$$

car $\frac{3\pi}{8} \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et on sait que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ on a $\arctan(\tan x) = x$.

Exercice 3 ($\simeq$ 4 points). On définit $\alpha = \arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

- $\sin(\alpha)$?

Le cours assure que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1;1]$. En prenant ici $x = \frac{3}{5}$ (qui appartient bien à $[-1;1]$), on obtient :

$$\sin(\alpha) = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

- $\sin(2\alpha)$?

On sait que, pour tout réel t, on a $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$. Donc ici $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$.

Or le cours assure que $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$. Ainsi $\cos(\alpha) = \cos\left(\arccos\left(\dfrac{3}{5}\right)\right) = \dfrac{3}{5}$.

Finalement, comme on a déjà calculé $\sin(\alpha)$ précédemment, on obtient

$$\sin(2\alpha) = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

- $\sin(3\alpha)$?

Remarquons d'abord que $\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha)$.

Or on sait (voir formulaire) que $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$. Par conséquent :

$$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)\cos(\alpha).$$

On a déjà calculé $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ et $\sin(2\alpha)$ précédemment ; il reste à gérer $\cos(2\alpha)$.

On sait que, pour tout réel t, on a $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 2 \times (\cos t)^2 - 1$.

Donc

$$\cos(2\alpha) = 2 \times (\cos\alpha)^2 - 1 = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = \frac{18-25}{25} = \frac{-7}{25}.$$

Finalement :

$$\sin(3\alpha) = \frac{4}{5} \times \frac{-7}{25} + \frac{24}{25} \times \frac{3}{5}$$

ce qui donne :

$$\sin(3\alpha) = \frac{-28}{125} + \frac{72}{125} = \frac{72-28}{125} = \frac{44}{125}$$

Exercice 4 ($\simeq 3$ points). On définit $\beta = 2\arctan(5)$.

- Calcul de $\cos(\beta)$:

On sait que, pour tout réel t, on a $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 2 \times (\cos t)^2 - 1$. En prenant $t = \arctan 5$, on obtient :

$$\cos(\beta) = \cos(2\arctan 5) = 2 \times (\cos(\arctan 5))^2 - 1$$

Par ailleurs, on sait que pour tout t appartenant à l'ensemble de définition de la fonction tangente, c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$. Par conséquent, $\cos^2 t = \dfrac{1}{1+\tan^2 t}$. Ainsi, en prenant encore $t = \arctan 5$, on a :

$$\cos^2(\arctan 5) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan 5)}$$

Or le cours assure que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\arctan t) = t$. Donc

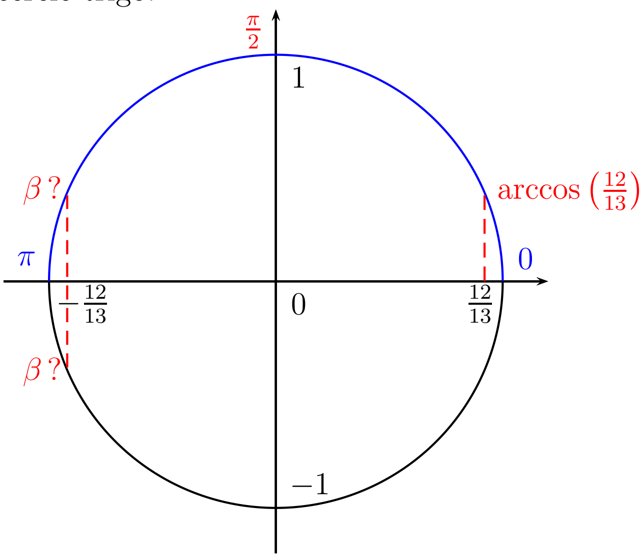
$$\cos^2(\arctan 5) = \frac{1}{1 + (\tan(\arctan 5))^2} = \frac{1}{1+(5)^2} = \frac{1}{1+25} = \frac{1}{26}$$

On revient maintenant au calcul de $\cos(\beta)$:

$$\cos(\beta) = 2 \times (\cos(\arctan 5))^2 - 1 = 2 \times \frac{1}{26} - 1 = \frac{1}{13} - 1 = -\frac{12}{13}$$

- Détermination d'une relation entre $2\arctan(5)$ et $\arccos\left(\dfrac{12}{13}\right)$.

Idée principale : maintenant que l'on sait que $\cos(\beta) = -\frac{12}{13}$, on va encadrer β pour savoir où se trouve β sur le cercle trigo.



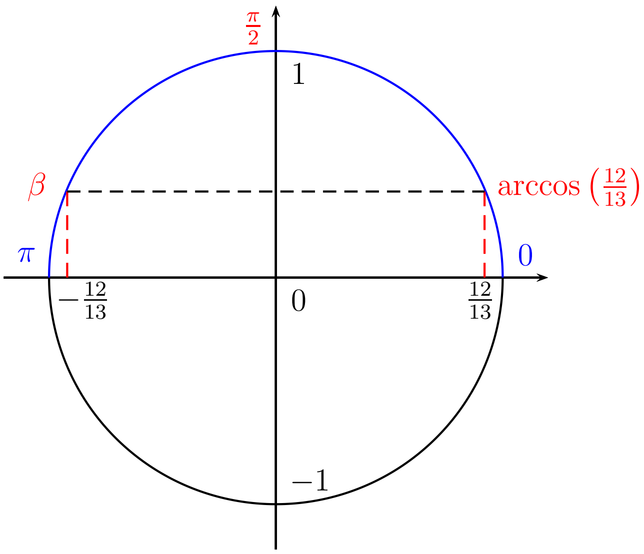
On sait que $1 < 5$. Comme arctan est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\arctan 1 < \arctan 5$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{4} < \arctan 5$. De plus, par définition de la fonction arctan, on a obligatoirement $\arctan 5 < \frac{\pi}{2}$. Ainsi on obtient

$$\frac{\pi}{4} < \arctan 5 < \frac{\pi}{2},$$

ce qui donne en multipliant par 2 cette double inégalité :

$$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi.$$

On sait donc où placer β sur le cercle trigo :



Par lecture sur le cercle trigo, on peut affirmer que :

$$\beta = \pi - \arccos\left(\frac{12}{13}\right).$$

Remarque. Pour être plus rigoureux et ne pas se contenter d'une lecture du cercle trigo, on aurait aussi pu procéder ainsi : avec l'encadrement obtenu précédemment $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, on peut montrer que $-\pi < -\beta < -\frac{\pi}{2}$, puis que $0 < \pi - \beta < \frac{\pi}{2}$.

De plus, par propriété du cosinus, $\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = -(-\frac{12}{13}) = \frac{12}{13}$. Alors

$$\arccos\left(\cos(\pi - \beta)\right) = \arccos\left(\frac{12}{13}\right).$$

Or, pour tout $x \in [0;\pi]$, on a $\arccos(\cos x) = x$. Donc en prenant $x = \pi - \beta$ qui est bien dans $[0;\pi]$ d'après l'encadrement précédent, on obtient :

$$\pi - \beta = \arccos\left(\frac{12}{13}\right),$$

ce qui redonne bien

$$\beta = 2\arctan(5) = \pi - \arccos\left(\frac{12}{13}\right).$$

Fin du corrigé