I.U.T. de Brest
G.M.P. 1
Outils mathématiques (M1301)

Année 2020-2021
Corrigé du devoir du 25/11/2020

Exercice 1 ($\simeq 5$ points). On considère f la fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + 3\ln x.$$

Remarque. Cet exercice est exactement la question 2 de l'exercice 1 de la feuille n° 1 de TD.

1. L'expression $-\dfrac{x}{2}$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et l'expression $3\ln x$ est définie pour tout $x \in]0;+\infty[$.

   Donc $D_f =]0;+\infty[$.

2. $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3\ln x$. Donc

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times 1 + 3 \times \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{x} = \frac{-x+6}{2x}$$

3. Limites de la fonction f aux bornes de D_f.

   - Limite quand $x \to 0^+$:
   On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\dfrac{x}{2}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} 3\ln x = -\infty$. Donc par somme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

   - Limite quand $x \to +\infty$:
   Si on procède comme précédemment on tombe sur une forme indéterminée. Pour contourner ce problème, on écrit :

$$f(x) = x\left(-\frac{1}{2} + 3 \times \frac{\ln x}{x}\right)$$

   Or $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées.
   Donc par produit puis somme $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-\dfrac{1}{2} + 3 \times \dfrac{\ln x}{x}\right) = -\dfrac{1}{2}$.
   Enfin, comme $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$, on obtient par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

4. Dérivée $f'(x) = \dfrac{-x+6}{2x}$. Comme c'est un quotient, on va faire un tableau de signes pour trouver le signe de $f'(x)$.
   D'une part, concernant le numérateur, $-x+6 > 0$ ssi $6 > x$.
   D'autre part, sur $D_f =]0;+\infty[$, le dénominateur $2x$ est toujours > 0. D'où :

x	0		6		$+\infty$
$-x+6$		$+$	0	$-$	
$2x$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$-3+3\ln 6$	$\searrow$	$-\infty$

   Remarque. On a $f(6) = -\dfrac{6}{2} + 3\ln 6 = -3 + 3\ln 6$.

5. L'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$.
Ici $a = 1$. Donc l'équation cherchée est $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$.
Or $f(1) = -\dfrac{1}{2} + 3\ln 1 = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(1) = \dfrac{-1+6}{2} = \dfrac{5}{2}$.
Par conséquent l'équation cherchée est $y = \dfrac{5}{2}(x-1) - \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $y = \dfrac{5}{2}x - \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}$, soit encore $y = \dfrac{5}{2}x - 3$.

Remarques concernant la question 4 de l'exercice 1.

Remarque n° 1. Pour étudier le signe de $f'(x)$ on aurait aussi pu résoudre l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
f'(x) \geqslant 0 \quad &\text{ssi} \quad -\frac{1}{2} + \frac{3}{x} \geqslant 0 \\
&\text{ssi} \quad \frac{3}{x} \geqslant \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{ sens de l'inégalité inchangé car addition de } \tfrac{1}{2} \text{ des deux côtés} \\
&\text{ssi} \quad 3 \geqslant \frac{x}{2} \quad \leftarrow \text{ sens de l'inégalité inchangé car multiplication par } x \text{ des deux côtés} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{et car } x > 0 \text{ sur } D_f \\
&\text{ssi} \quad 6 \geqslant x \quad \leftarrow \text{ sens de l'inégalité inchangé car multiplication par } 2 > 0 \text{ des deux côtés.}
\end{aligned}$$

Remarque n° 2. Concernant la façon de remplir le tableau de variations, même si $D_f =]0; +\infty[$, il ne faut pas écrire 0^+ sur la première ligne ; il faut juste écrire 0. Le fait que 0 est exclu de D_f apparaît lorsqu'on écrit les doubles barres. Sur la correction de la page précédente, il n'y a pas de double barre pour les lignes correspondant à $-x+6$ et $2x$ car ces deux expressions sont définies en 0. En revanche, pour f' et f, on met une double barre puisque ces deux fonctions ne sont pas définies en 0.

Remarque n° 3. Vu certaines copies (beaucoup trop !), il est bon de rappeler qu'un tableau de signe (avec règle du genre « plus » et « moins » donne « moins »...) ne fonctionne que pour des produits ou des quotients de fonctions (et certainement pas avec des sommes ou des différences). Si on a un tableau du genre :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	
$h(x)$	
$f'(x)$	
f	

c'est que $f'(x) = g(x) \times h(x)$ ou que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$.

C'est pourquoi, dans cet exercice 1 du devoir, on a pu en faire un en utilisant $f'(x) = \dfrac{-x+6}{2x}$, et qu'il était complètement foireux d'essayer d'en faire un avec $f'(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{x}$.

Exercice 2 ($\simeq 4$ points). On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (3x-1)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

1. • Calcul de $f'(x)$ pour tout réel x.

   f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.
   Donc $u'(x) = 3$ et, comme $v = \mathrm{e}^{w}$ avec $w(x) = -2x$, on a $v'(x) = w'(x)\,\mathrm{e}^{w(x)} = -2\,\mathrm{e}^{-2x}$. D'où

   $$f'(x) = 3\times\mathrm{e}^{-2x} + (3x-1)\times\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right) = \mathrm{e}^{-2x}\times[3-2(3x-1)] = \mathrm{e}^{-2x}\times[3-6x+2] = (5-6x)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

   • Calcul de $f''(x)$ pour tout réel x.

   f' est de la forme $h \times v$ avec $h(x) = 5 - 6x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.
   Donc $h'(x) = -6$ et on a déjà vu que $v'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x}$. D'où

   $$f''(x) = -6\times\mathrm{e}^{-2x} + (5-6x)\times\left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right) = \mathrm{e}^{-2x}\times[-6-2(5-6x)] = \mathrm{e}^{-2x}\times[-6-10+12x]$$

   Ainsi
   $$f''(x) = (12x-16)\,\mathrm{e}^{-2x} = 4(3x-4)\,\mathrm{e}^{-2x}$$

2. La fonction f est convexe sur un intervalle I si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
   Comme $f''(x) = 4\times(3x-4)\times\mathrm{e}^{-2x}$ est le produit de trois termes, on va faire un tableau de signe.
   • Le premier terme 4 est toujours positif.
   • Pour le 2ème terme $3x - 4$, résolvons l'inéquation :
   $$3x-4 \geqslant 0 \text{ ssi } 3x \geqslant 4, \text{ c'est-à-dire ssi } x \geqslant \frac{4}{3}.$$
   • Le 3ème terme e^{-2x} est $\geqslant 0$ pour tout réel x car e^{t} est toujours positif strict pour tout réel t.
   • Conclusion. On peut donc dresser le tableau de signe pour $f''(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
4		$+$		$+$	
$3x-4$		$-$	0	$+$	
e^{-2x}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

   On en déduit que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant \dfrac{4}{3}$.

   D'où f est convexe sur l'intervalle $\left[\dfrac{4}{3}; +\infty\right[$.

Remarques concernant la question 2 de l'exercice 2.

Remarque n° 1. On conclut en disant que la fonction f est convexe sur $\left[\dfrac{4}{3}; +\infty\right[$. Ce n'est pas $f(x)$ qui est convexe sur $\left[\dfrac{4}{3}; +\infty\right[$.

Remarque n° 2. Interdit d'évoquer $\ln(0)$, qui n'est pas défini, pour tenter péniblement de résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{-2x} \geqslant 0$.

Exercice 3 ($\simeq 3$ points).

• $\alpha = \arccos\left(\cos\dfrac{22\pi}{7}\right) = \dfrac{6\pi}{7}$
C'est exactement le contenu de la vidéo « Arccosinus - exercice 1 » accessible sur ma chaîne Youtube.

• $\beta = \arcsin\left(\sin\dfrac{22\pi}{7}\right) = -\dfrac{\pi}{7}$
C'est le même genre d'arguments que pour la vidéo « Arcsinus - exercice 1 » accessible sur ma chaîne Youtube.

• $\gamma = \arctan\left(\tan\dfrac{22\pi}{7}\right) = \dfrac{\pi}{7}$
C'est le même genre d'arguments que pour la vidéo « Arctangente - exercice 1 » accessible sur ma chaîne Youtube.

Exercice 4 ($\simeq 4$ points). On définit $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{4}{5}\right)$.

1. Même question que dans la vidéo « Arcsinus - exercice 3 » accessible sur ma chaîne Youtube.

   On sait que, pour tout réel $x \in [-1,1]$, on a $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$. Donc en prenant $x = \frac{4}{5}$ on obtient :
$$\cos(\alpha) = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$
   D'après le formulaire de trigo, on a : $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.
   On sait que, pour tout réel $x \in [-1,1]$, on a $\sin(\arcsin x) = x$. Donc avec la question 1, on a :
$$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

2. a) Comme $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ le nombre $\tan(2\alpha)$ est bien défini ssi $\cos(2\alpha) \neq 0$.
   On sait que, pour tout réel t, on a $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$. Donc ici :
$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \times (\sin\alpha)^2 = 1 - 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - 2 \times \frac{16}{25} = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25} \neq 0$$
   Donc le nombre $\tan(2\alpha)$ est bien défini.
   b)
$$\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{25} \times \frac{25}{7} = -\frac{24}{7}$$

Exercice 5 ($\simeq 4$ points). On définit $\beta = \arctan\left(3\sqrt{7}\right)$.

1. On sait que pour tout t appartenant à l'ensemble de définition de la fonction tangente, c'est-à-dire pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a $1 + \tan^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t}$. Par conséquent, $\cos^2 t = \dfrac{1}{1+\tan^2 t}$. Ainsi, en prenant $t = \beta$, on a :

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\arctan\left(3\sqrt{7}\right)\right)}$$

Or le cours assure que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\tan(\arctan t) = t$. Donc

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \left(\tan\left(\arctan\left(3\sqrt{7}\right)\right)\right)^2} = \frac{1}{1+\left(3\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{1 + 9 \times 7} = \frac{1}{64}$$

On revient maintenant au calcul de $\cos(\beta)$:

$$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{64}} = \pm\frac{1}{\sqrt{64}} = \pm\frac{1}{8}$$

Attention. Ici on avait une égalité du genre $y^2 = 5$ et on n'a pas balancé $y = \sqrt{5}$... En effet c'est $y = \sqrt{5}$ ou $y = -\sqrt{5}$.

Maintenant, par définition de la fonction arctangente, $\beta = \arctan\left(3\sqrt{7}\right)$ appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\cos\beta > 0$ (dessiner un cercle trigo si besoin et voir que β se trouve sur le côté droit du cercle).

Ainsi forcément $\cos\beta = +\dfrac{1}{8}$

2. Calcul de $\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)$.

On sait que $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$ pour tout réel t. On a donc $(\sin t)^2 = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$

En prenant $t = \dfrac{\beta}{2}$ on obtient :

$$\left(\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)^2 = \frac{1-\cos(\beta)}{2}$$

En utilisant la question précédente, cela donne :

$$\left(\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)^2 = \frac{1-\frac{1}{8}}{2} = \frac{\frac{7}{8}}{2} = \frac{7}{16}$$

D'où

$$\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Comme $3\sqrt{7} > 0$, on a $\arctan\left(3\sqrt{7}\right) > \arctan(0)$ car arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'où $\beta > 0$. En utilisant ce qui a été dit à la fin de la question 1, on peut affirmer que β appartient à l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc $\dfrac{\beta}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ et $\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right) > 0$ (dessiner un cercle trigo si besoin et voir que $\dfrac{\beta}{2}$ se trouve sur le quart supérieur droit du cercle).

Conclusion. $\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right) = +\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

Fin du corrigé