Exercice 1 ($\simeq 3$ points).

1. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{x-1}{5} - \dfrac{3x-2}{2} = 1$.

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{5} - \frac{3x-2}{2} = 1 \text{ si et seulemnt si } & 10 \times \left(\frac{x-1}{5} - \frac{3x-2}{2}\right) = 10 \times 1\,;\\ \text{ssi } & 2(x-1) - 5(3x-2) = 10\,;\\ \text{ssi } & 2x - 2 - 15x + 10 = 10\,;\\ \text{ssi } & -13x = 2\,;\\ \text{ssi } & x = -\frac{2}{13}.\end{aligned}$$

2. Ensemble de définition D_f de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 6}{\sqrt{9 - x^2}}$?

Tout d'abord, l'expression $2x^2 - 7x + 6$ est définie pour tout réel x. Donc l'expression $f(x)$ est définie ssi son dénominateur est défini et s'il est différent de zéro.
Or on sait que $\sqrt{t}$ est définie si et seulement si $t \geqslant 0$. Donc l'expression $\sqrt{9 - x^2}$ est définie ssi $9 - x^2 \geqslant 0$.
De plus $\sqrt{9 - x^2}$ est différent de zéro ssi $9 - x^2 \neq 0$.
Par conséquent, l'expression $f(x)$ est définie ssi $9 - x^2 > 0$.

$9 - x^2$ est un trinôme du second degré. Son discrimant vaut $\Delta = 36 = 6^2$ et ses racines sont égales à 3 et -3. Ainsi $9 - x^2$ est du signe de $a = -1 < 0$ à l'extérieur des racines. Autrement dit, $9 - x^2 > 0$ ssi $-3 < x < 3$.
Conclusion. $D_f =]-3; 3[$.

Exercice 2 ($\simeq 11,5$ points). On considère f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x + 1}{x^2}.$$

1. f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2\ln x + 1$ et $v(x) = x^2$.
Donc $u'(x) = 2 \times \frac{1}{x} + 0 = \frac{2}{x}$ et $v'(x) = 2x$. D'où

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x} \times x^2 - (2\ln x + 1) \times 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x - 4x\ln x - 2x}{x^4} = \frac{-4x\ln x}{x^4} = \frac{-4\ln x}{x^3}.$$

2. a) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (2\ln x + 1) = -\infty$.
Par ailleurs $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+$. D'où par quotient

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty.$$

À noter qu'il est essentiel de préciser que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^+$ (et pas simplement $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0$) pour assurer que la limite d'un quotient du type « $\frac{-\infty}{0^+}$ » est en fait $-\infty$ (règle des signes à respecter).

b) Tout d'abord, on transforme l'écriture de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2\ln x + 1}{x^2} = 2 \times \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ par croissances comparées (voir formulaire si besoin).
Conclusion. Par produit et somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \times 0 + 0 = 0$.

3. Sur $]0;+\infty[$, x^3 est strictement positif et donc $f'(x) = \frac{-4\ln x}{x^3}$ est du même signe que $-\ln x$.
Or $-\ln x > 0$ si et seulement si $\ln x < 0$, ssi $\mathrm{e}^{\ln x} < \mathrm{e}^0$ (car exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$), ssi $x < 1$.
D'où le tableau de variations de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

Remarque : $f(1) = \frac{2\ln 1 + 1}{1^2} = \frac{2 \times 0 + 1}{1} = 1$.

4. a) f' est de la forme $-4 \times \frac{U}{V}$ avec $U(x) = \ln x$ et $V(x) = x^3$. Donc $U'(x) = \frac{1}{x}$ et $V'(x) = 3x^2$. D'où

$$f''(x) = -4 \times \frac{\frac{1}{x} \times x^3 - \ln x \times 3x^2}{(x^3)^2} = -4 \times \frac{x^2 - 3x^2\ln x}{x^6} = -4 \times \frac{x^2(1 - 3\ln x)}{x^6} = -4 \times \frac{1 - 3\ln x}{x^4},$$

ainsi

$$f''(x) = 4 \times \frac{3\ln x - 1}{x^4}.$$

b) La fonction f est convexe sur un intervalle I si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
Or $x^4 \geqslant 0$, donc d'après la question précédente on voit que le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $3\ln x - 1$.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$ l'inéquation $3\ln x - 1 \geqslant 0$ est équivalente à $\ln x \geqslant \frac{1}{3}$.
Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, l'inéquation est équivalente à :
$\exp(\ln x) \geqslant \exp(\frac{1}{3})$, c'est-à-dire $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.
Conclusion. On en déduit que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{3}}$.
D'où f est convexe sur l'intervalle $[\mathrm{e}^{\frac{1}{3}};+\infty[$.

Exercice 3 ($\simeq 5,5$ points). On considère sur l'intervalle $[0;\pi]$ la fonction f définie par :

$$f(x) = 4\cos(3x) - 9x^2.$$

1. Pour tout $x \in [0;\pi]$, on obtient en utilisant $(\cos u)' = -u' \sin u$:

$$f'(x) = 4 \times (-3\sin(3x)) - 18x = -12\sin(3x) - 18x,$$

puis, en utilisant $(\sin u)' = u' \cos u$, on trouve :

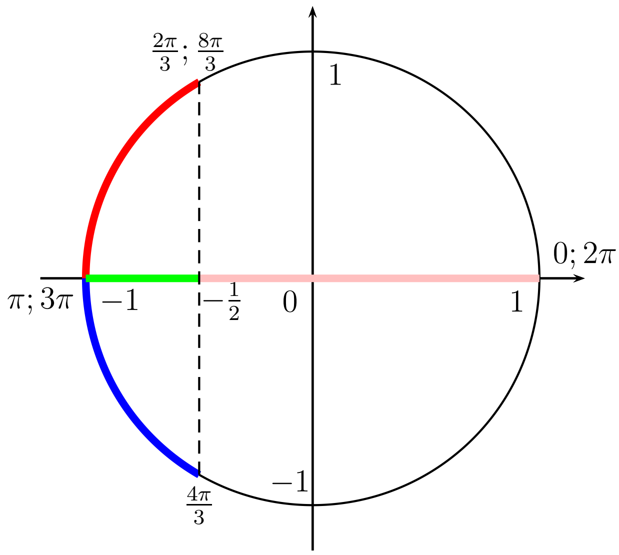
$$f''(x) = -12 \times 3\cos(3x) - 18 = -36\cos(3x) - 18.$$

2. Pour étudier la convexité de f, on s'intéresse au signe de $f''(x)$. On rappelle que f est convexe là où f'' est positive ou nulle.

   $f''(x) \geqslant 0$ ssi $-36\cos(3x) - 18 \geqslant 0$, ssi $\cos(3x) \leqslant -\dfrac{18}{36}$, ssi $\cos(3x) \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

   Comme $x \in [0; \pi]$, on a $3x \in [0; 3\pi]$.
   Considérons alors un réel t tel que $t \in [0; 3\pi]$ et cherchons d'abord à résoudre $\cos(t) \leqslant -\dfrac{1}{2}$.
   Travaillons pour cela avec un cercle trigo. Remarquons d'abord que, pour tout $t \in [0; 3\pi]$, on a :

   $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ ssi $t = \frac{2\pi}{3}$ ou $t = \frac{4\pi}{3}$ ou $t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$.



   Par lecture sur le cercle trigo, en parcourant le cercle de $t = 0$ vers progressivement $t = 3\pi$ (cela revient à faire un tour et demi), on constate (voir aussi dessin ci-dessus) que :

   $\cos(t) \leqslant -\frac{1}{2}$ (zone verte) ssi $\frac{2\pi}{3} \leqslant t \leqslant \frac{4\pi}{3}$ (zones rouge puis bleue, en faisant le 1er tour)
   ou
   $\frac{8\pi}{3} \leqslant t \leqslant 3\pi$ (à nouveau zone rouge, lors du 2ème tour partiel).

   Si on revient à x (en pensant $t = 3x$), on obtient :

   $\cos(3x) \leqslant -\frac{1}{2}$ ssi $\frac{2\pi}{3} \leqslant 3x \leqslant \frac{4\pi}{3}$ ou $\frac{8\pi}{3} \leqslant 3x \leqslant 3\pi$,

   ssi $\frac{2\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{9}$ ou $\frac{8\pi}{9} \leqslant x \leqslant \pi$.

   Conclusion. La fonction f est convexe sur chacun des deux intervalles suivants :

$$\left[\frac{2\pi}{9}; \frac{4\pi}{9}\right] \quad ; \quad \left[\frac{8\pi}{9}; \pi\right].$$

Fin du corrigé