I.U.T. de Brest
G.M.P. 1
Outils mathématiques (M1301)

Année 2020-2021
Corrigé du devoir du 14/10/2020

Exercice 1, inspiré des exercices WIMS ($\simeq 2$ points). On considère dans un repère orthonormal du plan les deux points A et B dont les coordonnées sont : $A(-5;7)$ et $B(-9;8)$.

Les points A et B ayant des abscisses différentes, la droite (AB) n'est pas verticale ; on peut donc chercher une équation de la droite (AB) sous la forme $y = ax + b$.

Comme $A(-5;7)$ appartient à cette droite, ses coordonnées vérifient l'équation $y = ax+b$, ce qui donne $7 = -5a + b$.
De même pour $B(-9;8)$, ce qui donne $8 = -9a + b$.

On a donc le système suivant à résoudre $\begin{cases} -5a + b = 7 \\ -9a + b = 8 \end{cases}$

La première équation permet d'écrire $b = 7+5a$, et en remplaçant dans la seconde équation on obtient : $-9a + 7 + 5a = 8$. Ainsi $-4a = 1$, c'est-à-dire $a = -\frac{1}{4}$.

Finalement $b = 7 + 5a = 7 - \frac{5}{4} = \frac{28-5}{4} = \frac{23}{4}$.

Conclusion. Une équation de la droite (AB) est $y = -\frac{1}{4}x + \frac{23}{4}$.

Exercice 2 ($\simeq 12,5$ points). On considère f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = (2 - \ln x)\ln x.$$

1. f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 2 - \ln x$ et $v(x) = \ln x$.
   Donc $u'(x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$. D'où
   $$f'(x) = -\frac{1}{x} \times \ln x + (2 - \ln x) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times [-\ln x + (2 - \ln x)] = \frac{1}{x} \times [2 - 2\ln x] \cdot$$
   Ainsi $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ avec $g(x) = 2 - 2\ln x = 2(1 - \ln x)$.
2. a) Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (2 - \ln x) = +\infty$.
   D'où par produit
   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2 - \ln x)\ln x = -\infty.$$
   b) Calculons $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to +\infty} (2 - \ln x) = -\infty$.
   Conclusion. Par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (2 - \ln x)\ln x = -\infty$.
3. Sur $]0;+\infty[$, x est strictement positif et donc $f'(x) = \dfrac{2(1 - \ln x)}{x}$ est du même signe que $1 - \ln x$.
   Or $1 - \ln x > 0$ si et seulement si $\ln x < 1$, ssi $\mathrm{e}^{\ln x} < \mathrm{e}^1$ (car exponentielle strictement croissante sur $\mathbb{R}$), ssi $x < \mathrm{e}^1$, ssi $x < \mathrm{e}$.
   D'où le tableau de variations de f :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Remarque : $f(\mathrm{e}) = (2 - \ln \mathrm{e}) \times \ln \mathrm{e} = (2-1) \times 1 = 1$.

4. Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$.
   Ici $a = 1$. On a donc $y = f'(1) \times (x-1) + f(1)$.
   Or $f(1) = (2 - \ln 1) \times \ln 1 = (2-0) \times 0 = 0$ et $f'(1) = \dfrac{2(1-\ln 1)}{1} = \dfrac{2(1-0)}{1} = 2$.
   D'où l'équation $y = 2(x-1)$ c'est-à-dire encore $y = 2x - 2$.
5. a) f' est de la forme $2 \times \dfrac{U}{V}$ avec $U(x) = 1 - \ln x$ et $V(x) = x$. Donc $U'(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $V'(x) = 1$. D'où
   $$f''(x) = 2 \times \frac{-\frac{1}{x} \times x - (1 - \ln x) \times 1}{x^2} = 2 \times \frac{-1 - 1 + \ln x}{x^2},$$
   ainsi
   $$f''(x) = 2 \times \frac{\ln x - 2}{x^2}.$$
   b) La fonction f est convexe sur un intervalle I si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
   Or $x^2 \geqslant 0$ pour tout réel x (le carré d'un réel est toujours positif ou nul), donc d'après la question précédente on voit que le signe de $f''(x)$ est le même que celui de $\ln x - 2$.
   Pour tout $x \in]0; +\infty[$ l'inéquation $\ln x - 2 \geqslant 0$ est équivalente à $\ln x \geqslant 2$.
   Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, l'inéquation est équivalente à :
   $\exp(\ln x) \geqslant \exp(2)$, c'est-à-dire $x \geqslant \mathrm{e}^2$.
   Conclusion. On en déduit que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant \mathrm{e}^2$.
   D'où f est convexe sur l'intervalle $[\mathrm{e}^2; +\infty[$.
6. L'abscisse x d'un éventuel point d'intersection de la courbe C_f et de l'axe des abscisses vérifie obligatoirement $f(x) = 0$.
   Or $f(x) = 0$ ssi $(2 - \ln x) \ln x = 0$
   ssi $2 - \ln x = 0$ ou $\ln x = 0$
   ssi $\ln x = 2$ ou $\ln x = 0$
   ssi $\mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^2$ ou $\mathrm{e}^{\ln x} = \mathrm{e}^0$
   ssi $x = \mathrm{e}^2$ ou $x = \mathrm{e}^0 = 1$
   Conclusion. Les points d'intersection de la courbe C_f et de l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(\mathrm{e}^2; 0)$ et $(1; 0)$.

Exercice 3 ($\simeq 5,5$ points). On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2\sin x - 4\cos(3x)}{1+\sin x}$$

1. Remarquons pour commencer que les expressions $2\sin x - 4\cos(3x)$ et $1+\sin x$ sont définies pour tout réel x. Donc $f(x)$ est définie ssi le dénominateur $1+\sin x$ est différent de zéro.

   Or $1+\sin x = 0$ ssi $\sin x = -1$, ssi $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Pour cette dernière égalité, dessiner si besoin un cercle trigo et constater que $\sin x = -1$ lorsque x est représenté par le point situé tout en bas du cercle.

   Conclusion. L'ensemble D_f de définition de f est l'ensemble de tous les réels à l'exclusion de ceux de la forme $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. Résolution sur l'intervalle $[0;\pi]$ de l'inéquation $f(x) < 2$.

   Compte tenu de la question 1, on peut constater que l'intervalle $[0;\pi]$ est bien contenu dans D_f.

   Maintenant $f(x) < 2 \quad$ ssi $\quad \dfrac{2\sin x - 4\cos(3x)}{1+\sin x} < 2.$

   Or, pour tout réel x, on a $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; donc $0 \leqslant 1+\sin x \leqslant 2$. En particulier $1+\sin x$ est toujours positif ou nul pour tout réel x. En fait, $1+\sin x$ est même toujours strictement positif sur D_f, et on peut multiplier l'inégalité précédente par ce terme sans changer le sens de l'inégalité. Ainsi

$$\begin{aligned}
f(x) < 2 \quad & \text{ssi} \quad 2\sin x - 4\cos(3x) < 2(1+\sin x) \\
& \text{ssi} \quad 2\sin x - 4\cos(3x) < 2 + 2\sin x \\
& \text{ssi} \quad -4\cos(3x) < 2 \\
& \text{ssi} \quad \cos(3x) > -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

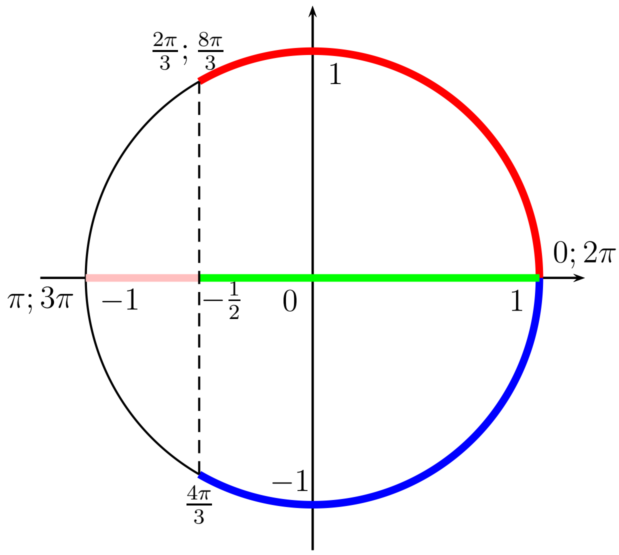
   $\longrightarrow$ ici le sens de l'inégalité a changé car on a divisé des deux côtés par -4 qui est négatif.

   Comme on veut résoudre l'inéquation sur $[0;\pi]$, on a $x \in [0;\pi]$, et donc $3x \in [0;3\pi]$.

   Considérons alors un réel t tel que $t \in [0;3\pi]$ et cherchons d'abord à résoudre $\cos(t) > -\dfrac{1}{2}$.

   Travaillons pour cela avec un cercle trigo. Remarquons d'abord que, pour tout $t \in [0;3\pi]$, on a :

   $\cos(t) = -\frac{1}{2}$ ssi $t = \frac{2\pi}{3}$ ou $t = \frac{4\pi}{3}$ ou $t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$.



Par lecture sur le cercle trigo, en parcourant le cercle de $t = 0$ vers progressivement $t = 3\pi$ (cela revient à faire un tour et demi), on constate (voir aussi dessin ci-dessus) que :

$\cos(t) > -\frac{1}{2}$ (zone verte) ssi $0 \leqslant t < \frac{2\pi}{3}$ (zone rouge en commençant le 1er tour)

ou

$\frac{4\pi}{3} < t < \frac{8\pi}{3}$ (zone bleue en terminant le 1er tour puis à nouveau zone rouge lors du 2ème tour partiel).

Si on revient à x (en pensant $t = 3x$), on obtient :

$\cos(3x) > -\frac{1}{2}$ ssi $0 \leqslant 3x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < 3x < \frac{8\pi}{3}$,

ssi $0 \leqslant x < \frac{2\pi}{9}$ ou $\frac{4\pi}{9} < x < \frac{8\pi}{9}$.

Conclusion. L'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) < 2$ est la réunion de deux intervalles :

$$S = \left[0; \frac{2\pi}{9}\right[\ \cup \ \left]\frac{4\pi}{9}; \frac{8\pi}{9}\right[.$$

Fin du corrigé