Exercice 1 ($\simeq 5$ points). Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' - 2y = 6x + 30\cos(4x)$.

• L'équa diff (E) est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$, avec $a(x) = -2$ dont une primitive est donnée par $A(x) = -2x$.

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda\, \mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\, \mathrm{e}^{2x}$ avec λ une constante réelle.

• Solution particulière y_P de (E) ?

Ici $a(x) = -2 = a$ est une constante, ce qui permet d'utiliser le tableau donné dans l'énoncé. Cependant on doit d'abord utiliser le principe de superposition : on va chercher une solution particulière y_{P1} de l'équation (E_1) $y' - 2y = 6x$, puis une solution particulière y_{P2} de l'équation (E_2) $y' - 2y = 30\cos(4x)$.

▶ Détermination de y_{P1} :

Comme $f_1(x) = 6x = P(x)\,\mathrm{e}^{kx}$ avec $k = 0$ et $P(x) = 6x$ qui est un polynôme de degré 1, le tableau donné dans l'énoncé nous permet de voir qu'on doit chercher y_{P1} sous la forme d'un polynôme de degré 1. Autrement dit on va écrire $y_{P1} = cx + d$ avec c, d des constantes réelles à déterminer. Il reste à traduire le fait que $y_{P1} = cx + d$ doit vérifier l'équation différentielle (E_1) $y' - 2y = 6x$.

Ainsi $y'_{P1} - 2y_{P1} = 6x$ si et seulement si $(cx + d)' - 2(cx + d) = 6x$,
ssi $c - 2cx - 2d = 6x$,
ssi $-2cx + c - 2d = 6x + 0$,
ssi $-2c = 6$ et $c - 2d = 0$ (par identification de polynômes),
ssi $c = -3$ et $d = \frac{c}{2} = -\frac{3}{2}$.

D'où $y_{P1} = -3x - \frac{3}{2}$.

▶ Détermination de y_{P2} :

Comme $f_2(x) = 30\cos(4x) = \lambda_1\cos(\omega x) + \lambda_2\sin(\omega x)$ avec $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 0$ et $\omega = 4$, on utilise la dernière ligne du tableau donné dans l'énoncé.

On va donc chercher y_{P2} sous la forme $y_{P2} = \alpha\cos(4x) + \beta\sin(4x)$ avec α, β des constantes réelles à déterminer.

En particulier on a $y'_{P2} = -4\alpha\sin(4x) + 4\beta\cos(4x)$.

On veut que $y'_{P2} - 2y_{P2} = 30\cos(4x)$, c'est-à-dire

$$-4\alpha\sin(4x) + 4\beta\cos(4x) - 2(\alpha\cos(4x) + \beta\sin(4x)) = 30\cos(4x).$$

Cela donne $(4\beta - 2\alpha)\cos(4x) + (-4\alpha - 2\beta)\sin(4x) = 30\cos(4x)$.

On en déduit que $4\beta - 2\alpha = 30$ et que $-4\alpha - 2\beta = 0$.

La seconde égalité permet d'écrire $\beta = \frac{-4}{2}\alpha = -2\alpha$, que l'on peut reporter dans la première égalité :

$$4 \times (-2\alpha) - 2\alpha = 30.$$

On obtient alors $-10\alpha = 30$, ce qui donne $\alpha = -3$ et finalement $\beta = -2\alpha = 6$.

D'où $y_{P2} = -3\cos(4x) + 6\sin(4x)$.

▶ On déduit de ce qui précède que $y_P = y_{P1} + y_{P2} = -3x - \frac{3}{2} - 3\cos(4x) + 6\sin(4x)$ est une solution particulière de l'équation (E).

• Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda\,\mathrm{e}^{2x} - 3x - \frac{3}{2} - 3\cos(4x) + 6\sin(4x)$$

avec λ une constante réelle.

Exercice 2 ($\simeq 4,5$ points).

Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $(1+x^2)y' + 2xy = \mathrm{e}^{2x} + \sin(5x)$.

Après avoir divisé par $1+x^2$, cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} \times y = \frac{\mathrm{e}^{2x} + \sin(5x)}{1+x^2}.$$

- Cette dernière équa diff est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$, avec $a(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ qui est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = 1+x^2$ (en effet, $u'(x) = 2x$). Une primitive A sur $]0;+\infty[$ de la fonction a est donc définie par $A(x) = \ln|u(x)| = \ln|1+x^2| = \ln(1+x^2)$ puisque $1+x^2 > 0$ pour tout réel x.

  Par conséquent $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln(1+x^2)} = \lambda \times \dfrac{1}{1+x^2}$ avec λ une constante réelle quelconque.

  Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda \times \dfrac{1}{1+x^2}$ avec λ une constante réelle.

- Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times \dfrac{1}{1+x^2}$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times \frac{1}{1+x^2} + \lambda(x) \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

  Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$(1+x^2)y_P' + 2xy_P = \mathrm{e}^{2x} + \sin(5x),$$

  c'est-à-dire

$$(1+x^2)\left(\lambda'(x) \times \frac{1}{1+x^2} + \lambda(x) \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right) + 2x \times \left(\lambda(x) \times \frac{1}{1+x^2}\right) = \mathrm{e}^{2x} + \sin(5x).$$

  Autrement dit,

$$\lambda'(x) + \lambda(x) \times \frac{-2x}{1+x^2} + 2x \times \lambda(x) \times \frac{1}{1+x^2} = \mathrm{e}^{2x} + \sin(5x),$$

  ce qui donne $\lambda'(x) = \mathrm{e}^{2x} + \sin(5x) = \dfrac{1}{2} \times 2\,\mathrm{e}^{2x} + \dfrac{1}{5} \times 5\sin(5x)$.

  Comme une primitive de $u'\,\mathrm{e}^u$ est e^u et qu'une primitive de $v'\sin v$ est $-\cos v$, on peut prendre

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{5}\cos(5x).$$

  D'où

$$y_P = \lambda(x) \times \frac{1}{1+x^2} = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{5}\cos(5x)\right) \times \frac{1}{1+x^2}.$$

- Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda \times \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{5}\cos(5x)\right) \times \frac{1}{1+x^2} = \left(\lambda + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{5}\cos(5x)\right) \times \frac{1}{1+x^2}$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 3 ($\simeq 5$ points). Résolution sur $]-2;2[$ de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ (2-x)y' + y = \frac{x(x-2)^2}{\sqrt{3x+7}}.$$

Après avoir divisé par $2-x$ (possible car $2-x \neq 0$ sur $]-2;2[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' + \frac{1}{2-x} \times y = \frac{x(x-2)^2}{(2-x)\sqrt{3x+7}}.$$

- Cette dernière équa diff est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$, avec $a(x) = \dfrac{1}{2-x}$.

  Or $a(x) = (-1) \times \dfrac{-1}{2-x}$ est de la forme $(-1) \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = 2-x$, et donc $u'(x) = -1$.

  Une primitive A sur $]-2;2[$ de la fonction a est donc définie par

$$A(x) = (-1) \times \ln|u(x)| = -\ln|2-x| = -\ln(2-x)$$

puisque $2-x$ est toujours > 0 pour tout $x \in]-2;2[$.

Par conséquent $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{+\ln(2-x)} = \lambda(2-x)$ avec λ une constante réelle quelconque.

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda \times (2-x)$ avec λ une constante réelle.

- Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times (2-x)$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times (2-x) + \lambda(x) \times (-1) = \lambda'(x) \times (2-x) - \lambda(x).$$

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$(2-x)y_P' + y_P = \frac{x(x-2)^2}{\sqrt{3x+7}},$$

c'est-à-dire

$$(2-x) \times \Big(\lambda'(x) \times (2-x) - \lambda(x)\Big) + \lambda(x) \times (2-x) = \frac{x(x-2)^2}{\sqrt{3x+7}},$$

c'est-à-dire encore

$$(2-x)^2 \times \lambda'(x) - (2-x) \times \lambda(x) + \lambda(x) \times (2-x) = \frac{x(x-2)^2}{\sqrt{3x+7}},$$

ce qui donne finalement

$$(2-x)^2 \times \lambda'(x) = \frac{x(x-2)^2}{\sqrt{3x+7}},$$

D'où

$$\lambda'(x) = \frac{x(x-2)^2}{(2-x)^2\sqrt{3x+7}}.$$

Or $x-2 = (-1) \times (2-x)$, donc $(x-2)^2 = \big((-1) \times (2-x)\big)^2 = (-1)^2 \times (2-x)^2 = (2-x)^2$.

Remarque. Pour ceux qui sont perdus avec la ligne précédente, on peut aussi utiliser les identités remarquables et constater que $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ tandis que $(2-x)^2 = 4 - 4x + x^2$; d'où l'égalité...

Ainsi
$$\lambda'(x) = \frac{x(x-2)^2}{(2-x)^2\sqrt{3x+7}} = \frac{x}{\sqrt{3x+7}} = x \times \frac{1}{\sqrt{3x+7}}$$

Pour trouver une primitive de $x \times \frac{1}{\sqrt{3x+7}}$, on va effectuer une IPP sans bornes. Rappelons d'abord la formule d'IPP (avec bornes) :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [\,u(x)\,v(x)\,]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ici on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x+7}}$.

Tout d'abord, on a $u'(x) = 1$.

Ensuite, comme $v'(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{\sqrt{3x+7}}$, on constate que $v'(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{w'(x)}{\sqrt{w(x)}}$ en prenant $w(x) = 3x+7$, et donc $w'(x) = 3$. Ainsi on peut prendre $v(x) = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{\,w(x)\,} = \dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{3x+7}\,$.

La formule d'IPP nous donne donc :

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+7}}\,\mathrm{d}x = \left[x \times \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3x+7}\right] - \int 1 \times \frac{1}{3} \times 2\sqrt{3x+7}\,\mathrm{d}x = \frac{2x}{3} \times \sqrt{3x+7} - \frac{2}{3} \times \int \sqrt{3x+7}\,\mathrm{d}x.$$

Or
$$\int \sqrt{3x+7}\,\mathrm{d}x = \int (3x+7)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \int 3 \times (3x+7)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

On sait qu'une primitive de $w'w^\alpha$, pour tout $\alpha \neq -1$, est $\frac{w^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Donc :

$$\int \sqrt{3x+7}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \frac{(3x+7)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times (3x+7)^{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{9}(3x+7)\sqrt{3x+7} + k,$$

avec k une constante. Finalement :

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+7}}\,\mathrm{d}x = \frac{2x}{3}\sqrt{3x+7} - \frac{4}{27}(3x+7)\sqrt{3x+7} + c,$$

avec c une constante.

On peut donc prendre $\lambda(x) = \dfrac{2x}{3}\sqrt{3x+7} - \dfrac{4}{27}(3x+7)\sqrt{3x+7}\,$. D'où

$$y_P = \lambda(x) \times (2-x) = \frac{2x}{3}(2-x)\sqrt{3x+7} - \frac{4}{27}(2-x)(3x+7)\sqrt{3x+7}\,.$$

- Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda(2-x) + \frac{2x}{3}(2-x)\sqrt{3x+7} - \frac{4}{27}(2-x)(3x+7)\sqrt{3x+7}\,.$$

avec λ une constante réelle quelconque.

- Remarque finale : évidemment la fin de cet exercice (trouver $\lambda(x)$ à partir de $\lambda'(x)$) était la question difficile du devoir.

Exercice 4 ($\simeq 5,5$ points). Résolution de l'équation différentielle (E) : $9y'' - 6y' + y = 8(1+2x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1. Équation homogène (H) : $9y'' - 6y' + y = 0$.
   L'unique solution de l'équation caractéristique $9r^2 - 6r + 1 = 0$ est $r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$ (car ici le discriminant est égal à $\Delta = 0$).
   Donc $y_H = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x}$, où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

2. Solution particulière y_P de (E) sous la forme $y_P = (\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   Alors, en dérivant y_P comme un produit, on obtient
   $$y_P' = \alpha\,\mathrm{e}^{-x} + (\alpha x + \beta) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (\alpha - \alpha x - \beta)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$
   Puis, en dérivant y_P' à nouveau comme un produit, on obtient
   $$y_P'' = -\alpha\,\mathrm{e}^{-x} + (\alpha - \alpha x - \beta) \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (\alpha x - 2\alpha + \beta)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

   $$\begin{aligned}
   y_P \text{ vérifie } (E) &\iff 9y_P'' - 6y_P' + y_P = 8(1+2x)\,\mathrm{e}^{-x} \\
   &\iff 9(\alpha x - 2\alpha + \beta)\,\mathrm{e}^{-x} - 6(\alpha - \alpha x - \beta)\,\mathrm{e}^{-x} + (\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{-x} = 8(1+2x)\,\mathrm{e}^{-x} \\
   &\iff 9(\alpha x - 2\alpha + \beta) - 6(\alpha - \alpha x - \beta) + (\alpha x + \beta) = 8(1+2x) \\
   &\iff 9\alpha x - 18\alpha + 9\beta - 6\alpha + 6\alpha x + 6\beta + \alpha x + \beta = 8 + 16x \\
   &\iff 16\alpha x - 24\alpha + 16\beta = 8 + 16x
   \end{aligned}$$

   Par identification on obtient :
   $16\alpha = 16$ (termes en x) ;
   et
   $-24\alpha + 16\beta = 8$ (termes constants).

   La première égalité donne $\alpha = \frac{16}{16} = 1$,
   puis la seconde permet d'obtenir $-24 \times 1 + 16\beta = 8$, c'est-à-dire $16\beta = 8 + 24 = 32$. Ainsi $\beta = \frac{32}{16} = 2$.
   D'où $y_P = (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$.

3. Déterminons l'unique solution de l'équation $9y'' - 6y' + y = 8(1+2x)\,\mathrm{e}^{-x}$ vérifiant $y(0) = -1$ et $y'(0) = 0$.
   On déduit des questions précédentes que les solutions de (E) sont données par
   $$y = y_H + y_P = (\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} + (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}$$
   où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

   Alors $y(0) = -1$ ssi $\lambda + 2 = -1$, ssi $\lambda = -3$.

   D'autre part, en dérivant à la fois y_H et y_P comme des produits, on obtient :
   $$y' = \mu\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{3}(\lambda + \mu x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} + \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$
   Par conséquent $y'(0) = 0$ ssi $\mu + \frac{1}{3}\lambda + 1 - 2 = 0$, ssi $\mu + \frac{1}{3} \times (-3) + 1 - 2 = 0$, ssi $\mu - 1 + 1 - 2 = 0$.
   D'où $\mu = 2$.

   Finalement l'unique solution cherchée est la fonction définie par :
   $$y = (-3 + 2x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} + (x+2)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Fin du corrigé.