Exercice 1 ($\simeq 5$ points).

1. Calcul de $\ell = \dfrac{\frac{2}{3}}{5} - \dfrac{2}{\frac{3}{5}}$.

$$\ell = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3 \times 5} - \frac{2 \times 5}{3} = \frac{2}{3 \times 5} - \frac{2 \times 5 \times 5}{3 \times 5} = \frac{2 - 50}{3 \times 5} = -\frac{48}{3 \times 5} = -\frac{3 \times 16}{3 \times 5} = -\frac{16}{5}.$$

2. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{4}{3x-2} = 7$.

   Remarquons d'abord que l'équation est définie pour $3x - 2 \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq \frac{2}{3}$.

   $\dfrac{4}{3x-2} = 7$ si et seulement si $4 = 7(3x-2)$ en multipliant par $3x-2$ des deux côtés ;

   ssi $\dfrac{4}{7} = 3x - 2$ en divisant par 7 des deux côtés ;

   ssi $\dfrac{4}{7} + 2 = 3x$ en ajoutant 2 des deux côtés ;

   ssi $3x = \dfrac{4+14}{7}$;

   ssi $3x = \dfrac{18}{7}$;

   ssi $x = \dfrac{18}{7 \times 3}$ en divisant par 3 des deux côtés ;

   ssi $x = \dfrac{6 \times 3}{7 \times 3} = \dfrac{6}{7}$.

3. Détermination de l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{5x+7}{3 - \sqrt{x+1}}$.

   L'expression $5x+7$ étant définie pour tout réel x, on peut calculer l'expression $f(x) = \dfrac{5x+7}{3-\sqrt{x+1}}$ si et seulement si on peut, à la fois, calculer $\sqrt{x+1}$ et diviser par le dénominateur $3 - \sqrt{x+1}$.

   Tout d'abord, on peut calculer $\sqrt{x+1}$ si et seulement si $x + 1 \geqslant 0$, c'est-à-dire ssi $x \geqslant -1$.

   Ensuite, on peut diviser par le dénominateur $3 - \sqrt{x+1}$ ssi $3 - \sqrt{x+1} \neq 0$, c'est-à-dire ssi $3 \neq \sqrt{x+1}$, c'est-à-dire ssi $3^2 \neq x+1$, c'est-à-dire ssi $3^2 - 1 \neq x$, c'est-à-dire ssi $x \neq 8$.

   D'où
   $$D_f = [-1; 8[\ \cup\ ]8; +\infty[.$$

Exercice 2 ($\simeq 7$ points). On considère f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{3x - 4\ln x}$$

1. f est de la forme $2 \times \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = 3x - 4\ln x$.
   Donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 3 - 4 \times \frac{1}{x} = 3 - \frac{4}{x}$. D'où

$$f'(x) = 2 \times \frac{1 \times (3x - 4\ln x) - x \times \left(3 - \frac{4}{x}\right)}{(3x - 4\ln x)^2} = 2 \times \frac{3x - 4\ln x - 3x + 4}{(3x - 4\ln x)^2} = 2 \times \frac{-4\ln x + 4}{(3x - 4\ln x)^2}$$

   En factorisant par 4 le numérateur, on obtient :

$$f'(x) = 2 \times 4 \times \frac{1 - \ln x}{(3x - 4\ln x)^2} = 8 \times \frac{1 - \ln x}{(3x - 4\ln x)^2}.$$

2. a) Calculons $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x}{3x - 4\ln x}$.

   On sait que $\lim\limits_{x \to 0^+} (3x) = 3 \times 0 = 0$ et que $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$; donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (3x - 4\ln x) = +\infty$.
   Par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0^+} (2x) = 0$.
   Conclusion. Par quotient des limites, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

   b) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x - 4\ln x}$.

   Pour contourner le problème des formes indéterminées, on écrit différemment $f(x)$:

$$f(x) = \frac{2x}{3x - 4\ln x} = \frac{2x}{x\left(3 - 4 \times \frac{\ln x}{x}\right)} = \frac{2}{3 - 4 \times \frac{\ln x}{x}}.$$

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées à l'infini (précisément le formulaire nous assure que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ pour tout $\alpha > 0$; et ici $\alpha = 1$).
   Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - 4 \times \dfrac{\ln x}{x}\right) = 3 - 4 \times 0 = 3$.
   Finalement, par quotient des limites, on obtient :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{2}{3}.$$

3. On a vu précédemment que $f'(x) = 8 \times \frac{1 - \ln x}{(3x - 4\ln x)^2}$. Comme cette expression est un quotient, on va déterminer le signe de $f'(x)$ en dressant un tableau de signe ; pour cela, on a besoin de :

   - 8 est toujours > 0.
   - $(3x - 4\ln x)^2$ est toujours $\geqslant 0$ car le carré d'un nombre réel est toujours positif ou nul.
   - On a $1 - \ln x \geqslant 0$ ssi $1 \geqslant \ln x$,
     ssi $e^1 \geqslant e^{\ln x}$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$;
     ssi $e \geqslant x$;
     ssi $x \leqslant e$.

   - Conclusion. Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	0		e		$+\infty$
8		$+$		$+$	
$1-\ln x$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$(3x-4\ln x)^2$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\Vert\ 0$	$\nearrow$	$\frac{2\,\mathrm{e}}{3\,\mathrm{e}-4}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

Remarque : $f(\mathrm{e})=\dfrac{2\,\mathrm{e}}{3\,\mathrm{e}-4\times\ln(\mathrm{e})}=\dfrac{2\,\mathrm{e}}{3\,\mathrm{e}-4\times 1}=\dfrac{2\,\mathrm{e}}{3\,\mathrm{e}-4}$.

Exercice 3 ($\simeq 8$ points).

1. a) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\quad 4t^2 - 4t - 3 = 0$.

   L'équation est de degré 2, c'est-à-dire de la forme $at^2 + bt + c = 0$.
   Calcul du discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 16 + 48 = 64 = 8^2$.
   Comme $\Delta > 0$, l'équation $4t^2 - 4t - 3 = 0$ admet deux solutions :

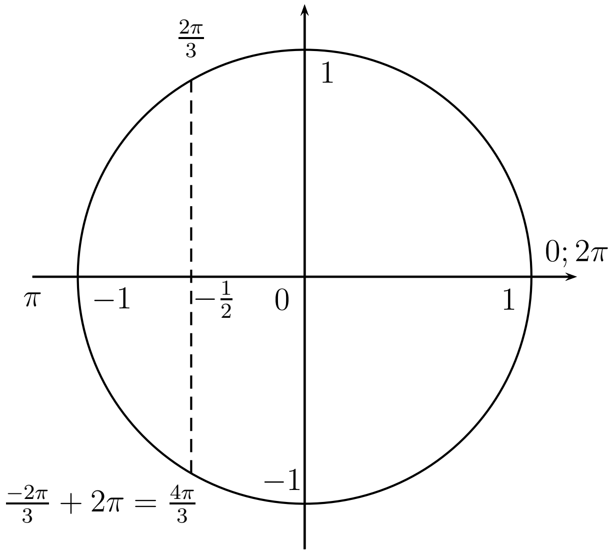
   $$t_1 = \frac{4-8}{2 \times 4} = \frac{-4}{2 \times 4} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad t_2 = \frac{4+8}{2 \times 4} = \frac{12}{2 \times 4} = \frac{3 \times 4}{2 \times 4} = \frac{3}{2}.$$

   b) Résolution sur $[0; 2\pi]$ de l'équation : $\quad 4\cos^2 x = 4\cos x + 3$.

   L'équation $4\cos^2 x = 4\cos x + 3$ s'écrit aussi $4(\cos x)^2 - 4\cos x - 3 = 0$.
   En posant $t = \cos x$, on retrouve l'équation $4t^2 - 4t - 3 = 0$ de la question 1.a. ce qui nous permet d'obtenir :

   $$4\cos^2 x = 4\cos x + 3 \qquad \text{ssi} \qquad \cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \cos x = \frac{3}{2}.$$

   Or, pour tout réel x, on sait que $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Donc l'équation $\cos x = \frac{3}{2}$ n'admet aucune solution réelle.
   En revanche, pour résoudre $\cos x = -\frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$, on s'appuie sur un cercle trigo :



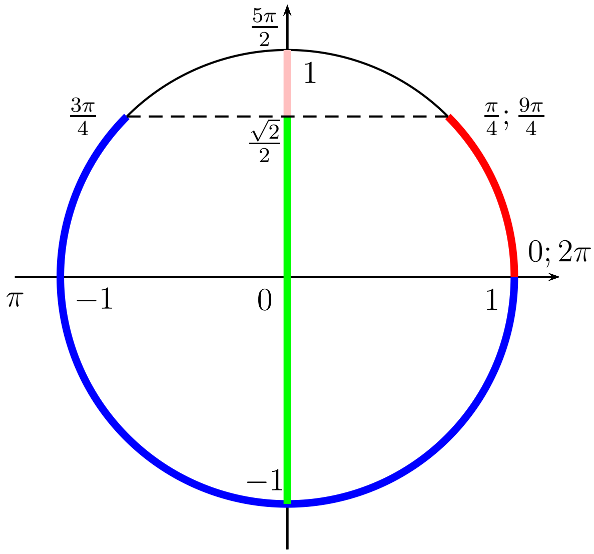
   Conclusion. L'ensemble des solutions de l'équation $4\cos^2 x = 4\cos x + 3$ est $\left\{ \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} \right\}$.

2. Résolution sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ de l'inéquation : $\quad 1 - \sqrt{2}\,\sin(5x) > 0$.

   Remarquons d'abord que
   $$\begin{aligned} 1 - \sqrt{2}\,\sin(5x) > 0 \quad &\text{ssi} \quad 1 > \sqrt{2}\,\sin(5x) \\ &\text{ssi} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} > \sin(5x) \\ &\text{ssi} \quad \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} > \sin(5x) \\ &\text{ssi} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} > \sin(5x) \\ &\text{ssi} \quad \sin(5x) < \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de résoudre sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\quad \sin(5x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Comme on veut résoudre l'inéquation sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, et donc $5x \in \left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$.
Posons $t = 5x$. Considérons alors un réel t tel que $t \in \left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$ et cherchons d'abord à résoudre $\sin(t) < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Travaillons pour cela avec un cercle trigo. Remarquons d'abord que, pour tout $t \in \left[0;\frac{5\pi}{2}\right]$, on a :

$\sin(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi $t = \frac{\pi}{4}$ ou $t = \frac{3\pi}{4}$ ou $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$.



Par lecture sur le cercle trigo, en parcourant le cercle de $t = 0$ vers progressivement $t = \frac{5\pi}{2}$ (cela revient à faire un tour et quart), on constate (voir aussi dessin ci-dessus) que :

$\sin(t) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (zone verte) ssi $0 \leqslant t < \frac{\pi}{4}$ (zone rouge en commençant le 1er tour)

ou

$\frac{3\pi}{4} < t < \frac{9\pi}{4}$ (zone bleue en terminant le 1er tour puis à nouveau zone rouge lors du 2ème tour partiel).

Si on revient à x (en utilisant $t = 5x$), on obtient :

$$\sin(5x) < \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ssi } 0 \leqslant 5x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < 5x < \frac{9\pi}{4},$$

$$\text{ssi } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{20} \text{ ou } \frac{3\pi}{20} < x < \frac{9\pi}{20}.$$

Conclusion. L'ensemble S des solutions sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ de l'inéquation $1-\sqrt{2}\,\sin(5x) > 0$ est la réunion de deux intervalles :

$$S = \left[0;\frac{\pi}{20}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{20};\frac{9\pi}{20}\right[.$$

Fin du corrigé