Exercice 1 ($\simeq 4,5$ points).

1. Calcul de $\ell = \dfrac{\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{7}}{\dfrac{10}{7}-\dfrac{1}{2}}$

$$\ell = \frac{\dfrac{21+5}{35}}{\dfrac{20-7}{14}} = \frac{\dfrac{26}{35}}{\dfrac{13}{14}} = \frac{26}{35} \times \frac{14}{13} = \frac{2\times 13\times 2\times 7}{5\times 7\times 13} = \frac{2\times 2}{5} = \frac{4}{5}.$$

2. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{12-5x}{4-x} = \dfrac{5}{3}$.

   Remarquons d'abord que l'équation est définie pour $4-x \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq 4$.

   $\dfrac{12-5x}{4-x} = \dfrac{5}{3}$ si et seulement si $12-5x = \dfrac{5}{3}(4-x)$ en multipliant par $4-x$ des deux côtés ;

   ssi $3(12-5x) = 5(4-x)$ en multipliant par 3 des deux côtés ;

   ssi $36-15x = 20-5x$;

   ssi $36 = 20+10x$ en ajoutant $15x$ des deux côtés ;

   ssi $16 = 10x$ en soustrayant 20 des deux côtés ;

   ssi $x = \dfrac{16}{10}$ en divisant par 10 des deux côtés ;

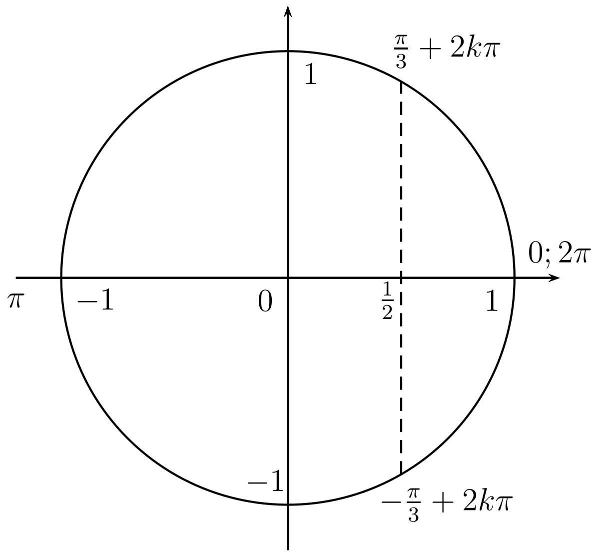
   ssi $x = \dfrac{2\times 8}{2\times 5} = \dfrac{8}{5}$.

3. Détermination de l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1+2\sin x}{1-2\cos x}$.

   Les expressions $1+2\sin x$ et $1-2\cos x$ sont définies pour tout réel x. Par conséquent, on peut calculer l'expression $f(x) = \dfrac{1+2\sin x}{1-2\cos x}$ si et seulement si on peut diviser par le dénominateur $1-2\cos x$.

   On peut diviser par le dénominateur $1-2\cos x$ ssi $1-2\cos x \neq 0$, c'est-à-dire ssi $1 \neq 2\cos x$, c'est-à-dire ssi $\cos x \neq \frac{1}{2}$.

   Cherchons maintenant pour quels réels x on a $\cos x = \frac{1}{2}$; autrement dit, cherchons les valeurs interdites de f. Pour cela, on s'appuie sur un cercle trigo :



Ainsi $\cos x = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion. L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble de tous les réels qui ne s'écrivent pas sous la forme $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela peut s'écrire aussi de la façon suivante :

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Exercice 2 ($\simeq 9,5$ points). On considère f la fonction définie par :

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x - 4\ln x.$$

1. L'expression $-\frac{x^2}{2} + 5x$ est définie pour tout réel x.
   L'expression $4\ln x$ est définie si et seulement si $x > 0$ car l'ensemble de définition de la fonction ln est $]0;+\infty[$.
   Conclusion. L'ensemble de définition de f est $D_f =]0;+\infty[$.

2. Pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = -\frac{1}{2} \times x^2 + 5x - 4\ln x$, et donc :

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x + 5 - 4 \times \frac{1}{x} = -x + 5 - \frac{4}{x} = \frac{-x^2 + 5x - 4}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

   avec $g(x) = -x^2 + 5x - 4$.

3. Limites de f aux bornes de D_f.
   - Calcul de $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$:

   On a $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$; donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\dfrac{x^2}{2} + 5x\right) = -\dfrac{0}{2} + 5 \times 0 = 0$.
   De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, ce qui donne par produit $\lim\limits_{x\to 0^+} -4\ln x = +\infty$.
   Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

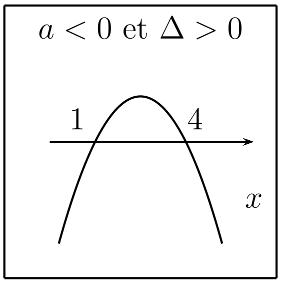
   - Calcul de $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$:

   Remarquons d'abord que $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 5x - 4\ln x = x\left(-\dfrac{x}{2} + 5\right) - 4\ln x$.
   On a $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(-\dfrac{x}{2} + 5\right) = -\infty$. Donc par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(-\dfrac{x}{2} + 5\right) = -\infty$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} -4\ln x = -\infty$.
Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque. On aurait aussi pu écrire $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 5x - 4\ln x = x^2\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{x} - 4 \times \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$. Ainsi, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{x} - 4 \times \dfrac{\ln x}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{2} + 0 - 0 = -\dfrac{1}{2}$.
Finalement par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

4. Pour tout $x \in D_f$, on a $x > 0$ et donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ est du même signe que $g(x)$, c'est-à-dire est du même signe que $-x^2 + 5x - 4$.
Étudions le signe du trinôme du second degré $-x^2 + 5x - 4$: le discriminant vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$ et les racines sont $\frac{-5-3}{-2} = 4$ et $\frac{-5+3}{-2} = 1$. Ainsi $a = -1 < 0$ et $\Delta = 9 > 0$, ce qui fait que la parabole d'équation $y = -x^2 + 5x - 4$ est représentée sous cette forme :



Par conséquent : $-x^2 + 5x - 4 \geqslant 0$ ssi $1 \leqslant x \leqslant 4$. Le tableau de variations est donc le suivant :

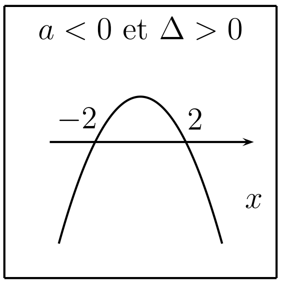
x	0		1		4		$+\infty$
$-x^2+5x-4$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	$12 - 8\ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

En effet, $f(1) = -\frac{1}{2} + 5 - 4\ln 1 = \frac{9}{2}$
et
$f(4) = -\frac{4^2}{2} + 5 \times 4 - 4\ln 4 = -8 + 20 - 4\ln(2^2) = 12 - 4 \times 2\ln 2 = 12 - 8\ln 2$.

5. Nous avons vu précédemment que $f'(x) = -x + 5 - 4 \times \dfrac{1}{x}$. On en déduit que, pour tout $x \in D_f$:

$$f''(x) = -1 + 0 - 4 \times \frac{-1}{x^2} = -1 + 4 \times \frac{1}{x^2} = \frac{4 - x^2}{x^2}.$$

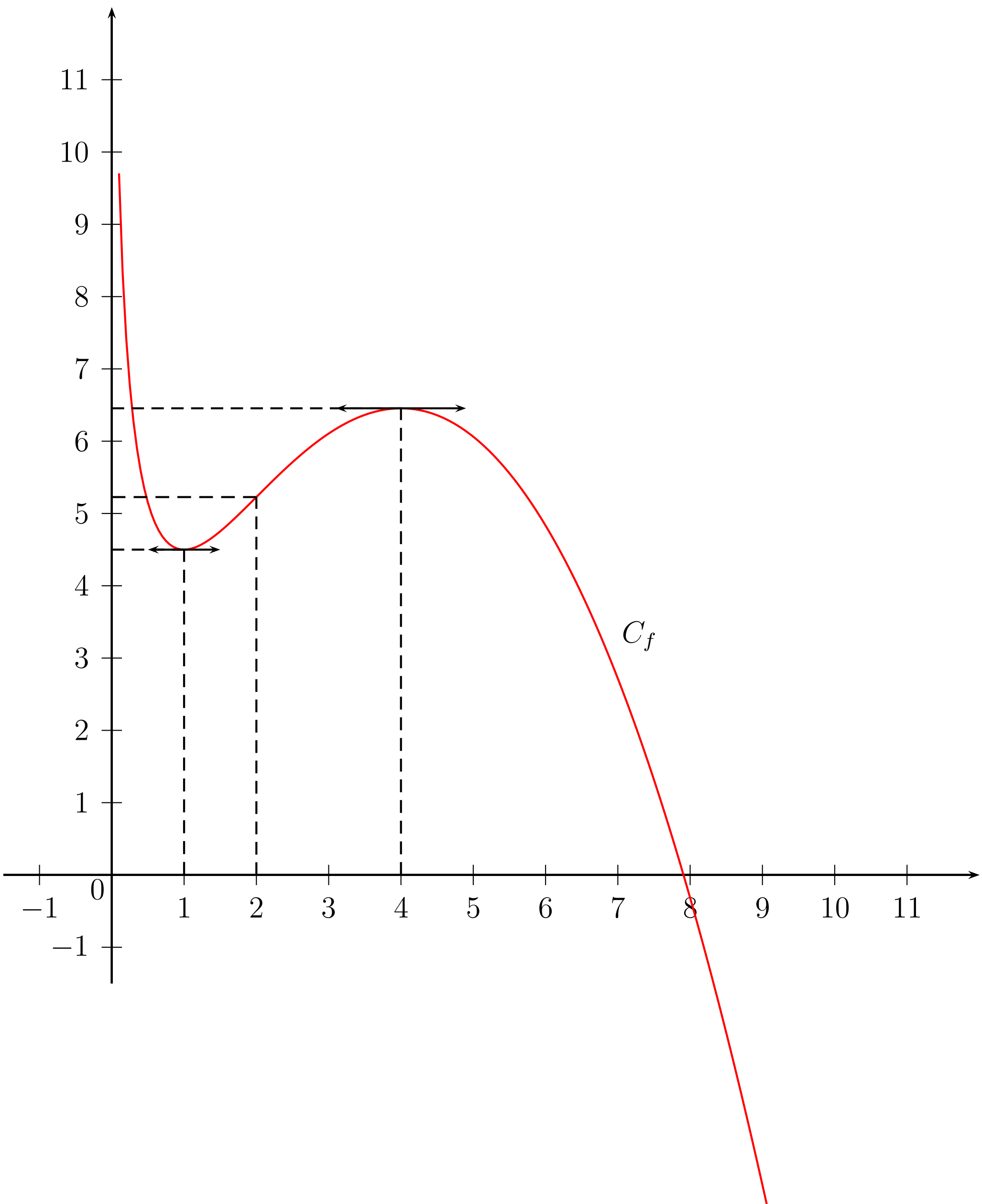
6. La fonction f est convexe sur un intervalle I si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.
Or pour tout $x \in D_f$, on a $x > 0$ et donc $x^2 > 0$. Ainsi sur D_f, $f''(x) = \frac{4-x^2}{x^2} \geqslant 0$ ssi $4 - x^2 \geqslant 0$.
Étudions le signe du trinôme du second degré $-x^2 + 4$: le discriminant vaut $\Delta = 0 + 16 = 16$ et les racines sont 2 et -2. Ainsi $a = -1 < 0$ et $\Delta = 16 > 0$, ce qui fait que la parabole d'équation $y = -x^2 + 4$ est représentée sous cette forme :



Par conséquent, sur $\mathbb{R}$, on a : $-x^2 + 4 \geqslant 0$ ssi $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
Conclusion. Comme $D_f =]0; +\infty[$ on obtient finalement $f''(x) \geqslant 0$ ssi $0 < x \leqslant 2$, ce qui permet d'affirmer que f est convexe sur l'intervalle $]0; 2]$.

Remarque. Pour étudier le signe de $f''(x)$, on aurait aussi pu utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ pour écrire $f''(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2} = \dfrac{(2-x)(2+x)}{x^2}$.

7. Tracé.
Sachant que $4 \ln 2 \simeq 2,8$ on déduit que :
$f(4) = 12 - 8 \ln 2 = 12 - 2 \times 4 \ln 2 \simeq 12 - 2 \times 2,8$ donc $f(4) \simeq 6,4$
et là où il y a changement de convexité :
$f(2) = 8 - 4 \ln 2 \simeq 8 - 2,8$ donc $f(2) \simeq 5,2$.



Exercice 3 ($\simeq 2$ points). Calculer

$$\alpha = \arccos\left(\cos\frac{147\pi}{5}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta = \arcsin\left(\sin\frac{147\pi}{5}\right).$$

Remarque de départ. En devoir, ne pas hésiter à s'aider du dessin d'un cercle trigo (comme vu en TD) et de faire ce dessin sur sa copie.

• $\alpha = \arccos\left(\cos\frac{147\pi}{5}\right)$?

On a

$$\frac{147\pi}{5} = \frac{(150-3)\pi}{5} = \frac{(15\times 10-3)\pi}{5} = 15\times\frac{10\pi}{5} - \frac{3\pi}{5} = 15\times 2\pi - \frac{3\pi}{5}.$$

Avec ce qui précède,

$$\cos\left(\frac{147\pi}{5}\right) = \cos\left(15\times 2\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$$

car cosinus est 2π-périodique.

Puis

$$\cos\left(\frac{147\pi}{5}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

car cosinus est paire. Ainsi

$$\arccos\left(\cos\frac{147\pi}{5}\right) = \arccos\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{3\pi}{5},$$

car $\frac{3\pi}{5} \in [0;\pi]$ et on sait que pour tout $x \in [0;\pi]$ on a $\arccos(\cos x) = x$.

• $\arcsin\left(\sin\frac{147\pi}{5}\right)$?

On a

$$\frac{147\pi}{5} = \frac{(140+7)\pi}{5} = \frac{(14\times 10+7)\pi}{5} = 14\times\frac{10\pi}{5} + \frac{7\pi}{5} = 14\times 2\pi + \pi + \frac{2\pi}{5}.$$

Donc

$$\sin\left(\frac{147\pi}{5}\right) = \sin\left(14\times 2\pi + \pi + \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right)$$

car sinus est 2π-périodique.

Puis

$$\sin\left(\frac{147\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi + \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$$

car pour tout réel x on a $\sin(\pi + x) = -\sin x = \sin(-x)$: ceci peut se voir si nécessaire en traçant les différents angles sur un cercle trigo. Ainsi

$$\arcsin\left(\sin\frac{147\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{-2\pi}{5}\right) = -\frac{2\pi}{5},$$

car $-\frac{2\pi}{5} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et on sait que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ on a $\arcsin(\sin x) = x$.

Exercice 4 ($\simeq 4$ points).

1. Calcul de $\cos\left(2\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$.

   Posons $t = \arcsin\dfrac{3}{5}$. Alors

   $$\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = \cos(2t) = 1 - 2\times(\sin t)^2 = 1 - 2\times\left(\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\right)^2.$$

   Or $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$. D'où :

   $$\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = 1 - 2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - 2\times\frac{9}{25} = \frac{25-18}{25} = \frac{7}{25}.$$

2. Calcul de $\sin\left(2\arccos\dfrac{4}{5}\right)$.

   Posons $t = \arccos\dfrac{4}{5}$. Alors

   $$\sin\left(2\arccos\frac{4}{5}\right) = \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t) = 2\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)\times\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right).$$

   Or $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ et $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$. D'où :

   $$\sin\left(2\arccos\frac{4}{5}\right) = 2\times\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\times\frac{4}{5} = 2\times\sqrt{1-\frac{16}{25}}\times\frac{4}{5} = 2\times\sqrt{\frac{9}{25}}\times\frac{4}{5} = 2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

3. Calcul de $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{9}\right)$.

   Posons $t = \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{9}$.
   Alors $2t = \arccos\dfrac{1}{9}$ et on a donc $\cos(2t) = \cos\left(\arccos\dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{1}{9}$.
   En résumé : on veut calculer $\sin t$ alors qu'on sait calculer $\cos(2t)$.

   On sait, avec le formulaire de trigo, que $\cos(2t) = 1 - 2\times(\sin t)^2$. D'où $2\times(\sin t)^2 = 1-\cos(2t)$ puis :

   $$(\sin t)^2 = \frac{1}{2}\times(1-\cos(2t)) = \frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{8}{9} = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

   On en déduit que $\sin t = \pm\dfrac{2}{3}$.

   Or par définition de la fonction arccosinus, on a $0 \leqslant \arccos\dfrac{1}{9} \leqslant \pi$. En divisant par 2 chacun des termes de cette double inégalité, on obtient $\dfrac{0}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{9} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.
   Comme $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, l'angle t est représenté par un point situé dans le quart supérieur droit du cercle trigo (faire un dessin, c'est plus parlant !), et donc forcément $\sin t \geqslant 0$.

   Conclusion.

   $$\sin t = \sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3}.$$

Fin du corrigé