Exercice 1 ($\simeq 5$ points). Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ y' + 2y = 3\,\mathrm{e}^{3x} + 4x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

L'équation (E) est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$ avec $a(x) = 2$ et $f(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x} + 4x^2\,\mathrm{e}^{2x}$.

- Solutions y_H de l'équation homogène ?
  Avec les notations du cours, on a $a(x) = 2$ dont une primitive est donnée par $A(x) = 2x$.
  Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{-2x}$ avec λ une constante réelle.

- Solution particulière y_P de (E) ?
  Ici $a(x) = 2 = a$ est une constante, ce qui permet d'utiliser le tableau donné dans l'énoncé.
  Cependant on doit d'abord utiliser le principe de superposition :
  on va d'abord chercher une solution particulière y_{P1} de l'équation (E_1) $y' + 2y = 3\,\mathrm{e}^{3x}$,
  puis une solution particulière y_{P2} de l'équation (E_2) $y' + 2y = 4x^2\,\mathrm{e}^{2x}$.

  ▶ Détermination de y_{P1} :
  Comme $f_1(x) = 3\,\mathrm{e}^{3x} = P_1(x)\,\mathrm{e}^{k_1 x}$ avec $k_1 = 3 \neq -a$ (car $3 \neq -2$) et $P_1(x) = 3$ qui est un polynôme de degré 0, le tableau donné dans l'énoncé nous permet de voir qu'on doit chercher y_{P1} sous la forme $y_{P1} = Q_1(x)\,\mathrm{e}^{3x}$ avec $Q_1(x)$ un polynôme de degré 0. Autrement dit on va écrire $y_{P1} = \alpha\,\mathrm{e}^{3x}$ avec α une constante réelle à déterminer. Il reste à traduire le fait que $y_{P1} = \alpha\,\mathrm{e}^{3x}$ doit vérifier l'équation différentielle (E) $y' + 2y = 3\,\mathrm{e}^{3x}$.

  Ainsi, pour tout réel x, on a :
  $y'_{P1} + 2y_{P1} = 3\,\mathrm{e}^{3x}$ si et seulement si $(\alpha\,\mathrm{e}^{3x})' + 2 \times \alpha\,\mathrm{e}^{3x} = 3\,\mathrm{e}^{3x}$,
  ssi $3\alpha\,\mathrm{e}^{3x} + 2 \times \alpha\,\mathrm{e}^{3x} = 3\,\mathrm{e}^{3x}$,
  ssi $5\alpha\,\mathrm{e}^{3x} = 3\,\mathrm{e}^{3x}$,
  ssi $5\alpha = 3$ (après avoir divisé par e^{3x} qui est différent de 0),
  ssi $\alpha = \frac{3}{5}$.
  D'où $y_{P1} = \frac{3}{5}\,\mathrm{e}^{3x}$.

  ▶ Détermination de y_{P2} :
  Comme $f_2(x) = 4x^2\,\mathrm{e}^{2x} = P_2(x)\,\mathrm{e}^{k_2 x}$ avec $k_2 = 2 \neq -a$ (car $2 \neq -2$) et $P_2(x) = 4x^2$ qui est un polynôme de degré 2, le tableau donné dans l'énoncé nous permet de voir qu'on doit chercher y_{P2} sous la forme $y_{P2} = Q_2(x)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec $Q_2(x)$ un polynôme de degré 2. Autrement dit on va écrire $y_{P2} = (bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec b, c, d des constantes réelles à déterminer. Il reste à traduire le fait que $y_{P2} = (bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{2x}$ doit vérifier l'équation différentielle (E) $y' + 2y = 4x^2\,\mathrm{e}^{2x}$.

  Ainsi, pour tout réel x, on a :
  $y'_P + 2y_P = 4x^2\,\mathrm{e}^{2x}$ si et seulement si $((bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{2x})' + 2 \times (bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{2x} = 4x^2\,\mathrm{e}^{2x}$,
  ssi $(2bx + c)\,\mathrm{e}^{2x} + (bx^2 + cx + d) \times 2\,\mathrm{e}^{2x} + 2 \times (bx^2 + cx + d)\,\mathrm{e}^{2x} = 4x^2\,\mathrm{e}^{2x}$,
  ssi $(2bx + c) + (bx^2 + cx + d) \times 2 + 2 \times (bx^2 + cx + d) = 4x^2$ (après avoir divisé par e^{2x} qui est différent de 0),
  ssi $2bx + c + 4(bx^2 + cx + d) = 4x^2$,
  ssi $4bx^2 + (2b + 4c)x + (c + 4d) = 4x^2$.
  Par identification de polynômes, on a donc :

$$y_P' + 2y_P = 4x^2\,\mathrm{e}^{2x} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} 4b &= 4 \quad \leftarrow \text{ termes en } x^2 \\ 2b + 4c &= 0 \quad \leftarrow \text{ termes en } x \\ c + 4d &= 0 \quad \leftarrow \text{ termes constants} \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} b &= 1 \\ c &= \frac{-2b}{4} = -\frac{1}{2} \\ d &= \frac{-c}{4} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

D'où $y_{P2} = \left(x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{2x}$.

▶ On déduit de ce qui précède que $y_P = y_{P1} + y_{P2} = \dfrac{3}{5}\,\mathrm{e}^{3x} + \left(x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{2x}$ est une solution particulière de l'équation (E).

- Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent
  $y = y_H + y_P = \lambda\,\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{3}{5}\,\mathrm{e}^{3x} + \left(x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}\right)\mathrm{e}^{2x}$ avec λ une constante réelle.

Exercice 2 ($\simeq 4,5$ points). Résolution sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ xy' - 2y = x^3\cos(3x)\sin x.$$

Après avoir divisé par x (possible car $x \neq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' - \frac{2}{x} \times y = x^2\cos(3x)\sin x.$$

Cette dernière équation est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$ avec $a(x) = -\dfrac{2}{x}$ et $f(x) = x^2\cos(3x)\sin x$.

- Solutions y_H de l'équation homogène ?
  $a(x) = -\dfrac{2}{x} = -2 \times \dfrac{1}{x}$ est de la forme $(-2) \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = x$ (et donc $u'(x) = 1$). Une primitive A sur $]0;+\infty[$ de la fonction a est donc définie par

$$A(x) = (-2) \times \ln|u(x)| = (-2) \times \ln|x| = -2\ln(x)$$

puisque $x > 0$ pour tout réel $x \in]0;+\infty[$. Par conséquent

$$y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{2\ln(x)} = \lambda\left(\mathrm{e}^{\ln(x)}\right)^2 = \lambda \times x^2$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda \times x^2$ avec λ une constante réelle.

Remarque. Ici aucune surprise pour y_H vu que c'était exactement le même raisonnement que dans l'exercice 6 de la feuille 3 de TD.

- Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times x^2$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times x^2 + \lambda(x) \times 2x.$$

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$x \times y_P' - 2 \times y_P = x^3\cos(3x)\sin x,$$

c'est-à-dire

$$x \times \left[\lambda'(x) \times x^2 + \lambda(x) \times 2x\right] - 2 \times \lambda(x) \times x^2 = x^3 \cos(3x) \sin x,$$

c'est-à-dire encore

$$x^3\lambda'(x) + 2x^2\lambda(x) - 2x^2\lambda(x) = x^3 \cos(3x) \sin x.$$

Autrement dit,

$$x^3\lambda'(x) = x^3 \cos(3x) \sin x,$$

ce qui donne

$$\lambda'(x) = \cos(3x) \sin x.$$

Remarque. Ici inutile de se faire du mal avec une IPP (même si une double IPP permet d'y arriver péniblement)... Il suffit de penser à la bonne formule de trigo, exactement comme dans l'exercice 4 (intégrale I_4) de la feuille 1 de TD ou dans l'exercice 1 (intégrale C) du devoir du 17/02/2021.

On connait la formule de trigo : $\sin a \times \cos b = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$. Donc en prenant $a = x$ et $b = 3x$, on obtient :

$$\lambda'(x) = \cos(3x) \sin x = \frac{1}{2}[\sin(4x) + \sin(-2x)]$$

ce qui donne encore, puisque sinus est une fonction impaire,

$$\lambda'(x) = \cos(3x) \sin x = \frac{1}{2}[\sin(4x) - \sin(2x)].$$

Par conséquent,

$$\lambda'(x) = \frac{1}{2}[\sin(4x) - \sin(2x)] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} \times 4\sin(4x) - \frac{1}{2} \times 2\sin(2x)\right].$$

Comme une primitive de $u' \sin u$ est $-\cos u$, on peut choisir en prenant $u(x) = 4x$ puis $u(x) = 2x$:

$$\lambda(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\right] = -\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{4}\cos(2x).$$

D'où

$$y_P = \lambda(x) \times x^2 = -\frac{x^2}{8}\cos(4x) + \frac{x^2}{4}\cos(2x).$$

- Conclusion : les solutions de (E) sur $]0; +\infty[$ sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda x^2 - \frac{x^2}{8}\cos(4x) + \frac{x^2}{4}\cos(2x) = x^2\left(\lambda - \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\right)$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 3 ($\simeq 5$ points). Résolution sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle :

$$(E) \ : \ \cos(x) \times y' + \sin(x) \times y = \sin^3(x).$$

Après avoir divisé par $\cos x$ (possible car $\cos x \neq 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' + \frac{\sin x}{\cos x} \times y = \frac{\sin^3 x}{\cos x}.$$

Cette dernière équation est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$ avec $a(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{\cos x}$.

- Solutions y_H de l'équation homogène ?

$a(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -1 \times \dfrac{-\sin x}{\cos x}$ est de la forme $(-1) \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = \cos x$ (et donc $u'(x) = -\sin x$). Une primitive A sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction a est donc définie par

$$A(x) = (-1) \times \ln|u(x)| = (-1) \times \ln|\cos x| = -\ln(\cos x)$$

puisque $\cos x > 0$ pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Par conséquent

$$y_H = \lambda\, \mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\, \mathrm{e}^{\ln(\cos x)} = \lambda \times \cos x$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda \times \cos x$ avec λ une constante réelle.

- Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times \cos x$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times \cos x - \lambda(x) \times \sin x.$$

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$\cos x \times y_P' + \sin x \times y_P = \sin^3 x,$$

c'est-à-dire

$$\cos x \times [\lambda'(x) \times \cos x - \lambda(x) \times \sin x] + \sin x \times \lambda(x) \times \cos x = \sin^3 x,$$

c'est-à-dire encore

$$\cos^2 x \times \lambda'(x) - \cos x \times \sin x \times \lambda(x) + \sin x \times \cos x \times \lambda(x) = \sin^3 x.$$

Autrement dit,

$$\cos^2 x \times \lambda'(x) = \sin^3 x,$$

ce qui donne

$$\lambda'(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}.$$

Remarque. Ici les choses sérieuses commencent et cette partie était volontairement nettement plus difficile. Soit on procède comme ci-dessous (ce qui est le plus efficace), soit on effectue une IPP en choisissant $u(x) = \sin^3 x$ et $v'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ (mais là c'est long et technique en termes de calculs).

On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout réel x ; donc $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Ainsi on obtient :

$$\lambda'(x) = \frac{\sin x \times \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \times (1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x - \sin x \times \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \times \cos^2 x}{\cos^2 x}$$

D'où

$$\lambda'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x$$

Le premier terme $\dfrac{\sin x}{\cos^2 x} = (-1) \times \dfrac{-\sin x}{(\cos x)^2}$ est de la forme $(-1) \times \dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$ en prenant $u(x) = \cos x$ (et donc $u'(x) = -\sin x$). Une primitive de ce terme est donc $(-1) \times \dfrac{-1}{u(x)} = \dfrac{1}{u(x)} = \dfrac{1}{\cos x}$.

Enfin, comme une primitive de $u' \sin u$ est $-\cos u$, le second terme intervenant dans $\lambda'(x)$ est facile à intégrer, et on peut choisir :

$$\lambda(x) = \frac{1}{\cos x} + \cos x.$$

D'où

$$y_P = \lambda(x) \times \cos x = 1 + \cos^2 x.$$

- Conclusion : les solutions de (E) sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda \cos x + 1 + \cos^2 x$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 4 ($\simeq 5,5$ points). On considère l'équation différentielle :

$$(E) : \ y'' + 2y' + 101y = 505.$$

Remarque. Cet exercice est très fortement inspiré des vidéos qu'il fallait visionner pour préparer les cours magistraux. Les vidéos concernées sont les exemples 1 et 1bis de la Playlist :

« Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants »

1. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
   - Résolution de l'équation homogène $(H) : \ y'' + 2y' + 101y = 0$.

   Les solutions de l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 101 = 0$ sont $r_1 = -1 - 10i$ et $r_2 = -1 + 10i$ (car discriminant $\Delta = -400 = -20^2$).
   Donc $y_H = (\lambda \cos(10x) + \mu \sin(10x))\,\mathrm{e}^{-x}$, où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

   - Cherchons une solution particulière y_P de l'équation (E). On peut ici chercher une solution évidente. En fait, comme le second membre de l'équa. diff., ici $f(x) = 505$, est une constante, on va chercher y_P sous la forme d'une constante : $y_P = k$ où k est une constante réelle à déterminer. Ainsi $y_P' = 0$ et $y_P'' = 0$, ce qui signifie que y_P est solution de (E) ssi $0 + 2 \times 0 + 101 \times k = 505$. Par conséquent, $k = \frac{505}{101} = 5$.
   Finalement $y_P = 5$ est une solution particulière de (E).

   - Conclusion. Toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équa. diff. $(E) : \ y'' + 2y' + 101y = 505$ sont toutes les fonctions qui s'écrivent

   $$y = y_H + y_P = (\lambda \cos(10x) + \mu \sin(10x))\,\mathrm{e}^{-x} + 5$$

   avec λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

2. a) Détermination de l'unique solution de l'équation $y'' + 2y' + 101y = 505$ vérifiant $y(0) = 7$ et $y'(0) = -2$.

   D'après la question précédente, on sait déjà que $y = (\lambda \cos(10x) + \mu \sin(10x))\,\mathrm{e}^{-x} + 5$ avec λ et μ sont des constantes réelles.
   D'une part, la condition $y(0) = 7$ se traduit par $(\lambda \cos(0) + \mu \sin(0))\,\mathrm{e}^{-0} + 5 = 7$, c'est-à-dire $\lambda + 5 = 7$, c'est-à-dire encore $\lambda = 7 - 5 = 2$. Ainsi

   $$y = (2\cos(10x) + \mu \sin(10x))\,\mathrm{e}^{-x} + 5$$

   Par conséquent, en utilisant la formule de dérivation d'un produit, on obtient :

   $$y' = (-20\sin(10x) + 10\mu \cos(10x))\,\mathrm{e}^{-x} + (2\cos(10x) + \mu \sin(10x)) \times (-\mathrm{e}^{-x})$$

   D'autre part, la condition $y'(0) = -2$ nous donne $(-20\sin(0) + 10\mu \cos(0))\,\mathrm{e}^{0} + (2\cos(0) + \mu \sin(0)) \times (-\mathrm{e}^{0}) = -2$, c'est-à-dire $10\mu - 2 = -2$, c'est-à-dire encore $\mu = 0$. Ainsi

   $$y = 2\cos(10x)\,\mathrm{e}^{-x} + 5$$

b) Tracé, sur l'intervalle $[0;3]$, de l'allure de la courbe représentative de la fonction trouvée à la question 2.a.
Voir au timecode 15 :48 la vidéo « Équa. diff. linéaires d'ordre 2 à coeff. constants - Exemple 1bis »

Éléments à mettre en avant :

- $y(0) = 7$ donc la courbe passe par le point de coordonnées $(0;7)$. On peut même ajouter que la pente de la tangente en ce point vaut -2 car $y'(0) = -2$.

- On a $-1 \leqslant \cos(10x) \leqslant 1$ pour tout réel x. Comme $2\,\mathrm{e}^{-x}$ est toujours positif, on obtient $-2\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant 2\cos(10x)\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant 2\,\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi la courbe représentant $x \mapsto 2\cos(10x)\,\mathrm{e}^{-x}$ est coincée entre les courbes représentant les fonctions $x \mapsto -2\,\mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto 2\,\mathrm{e}^{-x}$.

- La courbe qui nous intéresse, à savoir la courbe représentant la fonction $x \mapsto 2\cos(10x)\,\mathrm{e}^{-x} + 5$, s'obtient en décalant verticalement de 5 unités vers le haut la courbe représentant la fonction $x \mapsto 2\cos(10x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

- Cerise sur le gâteau : on peut remarquer que $\cos(10x) = 0$ ssi $10x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire ssi $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10}$.
Par conséquent, la courbe représentant la fonction $x \mapsto 2\cos(10x)\,\mathrm{e}^{-x} + 5$ passe à la hauteur 5 en ordonnées pour toutes les abscisses $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{k\pi}{10} = \dfrac{\pi + 2k\pi}{20}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc pour $x = \dfrac{\pi}{20}$, $x = \dfrac{3\pi}{20}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, etc...

Fin du corrigé