**Exercice 1 ($\simeq 10,5$ points).**

- Calcul de $A = \displaystyle\int_0^1 3x\left(2x^2-1\right)^4 \mathrm{d}x$ :

On sait qu'une primitive de $u'u^\alpha$ pour $\alpha \neq -1$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

En posant ici $\alpha = 4$ et $u(x) = 2x^2 - 1$, on a donc $u'(x) = 4x = 4x$ et on peut écrire en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$A = \int_0^1 \frac{3}{4} \times 4x\left(2x^2-1\right)^4 \mathrm{d}x = \frac{3}{4} \times \int_0^1 4x\left(2x^2-1\right)^4 \mathrm{d}x = \frac{3}{4} \times \left[\frac{\left(2x^2-1\right)^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \left[\left(2x^2-1\right)^5\right]_0^1.$$

D'où

$$A = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \left(1^5 - (-1)^5\right) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times \left(1-(-1)\right) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} \times 2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 2 \times 5} = \frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}.$$

- Calcul de $B = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{2\,\mathrm{e}^{3x}}{4-5\,\mathrm{e}^{3x}} \mathrm{d}x$ :

On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

En posant ici $u(x) = 4 - 5\,\mathrm{e}^{3x}$, on a donc $u'(x) = 0 - 5 \times 3\,\mathrm{e}^{3x} = -15\,\mathrm{e}^{3x}$ et on peut écrire en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$B = 2 \times \frac{1}{-15} \times \int_0^{\ln 2} \frac{-15\,\mathrm{e}^{3x}}{4-5\,\mathrm{e}^{3x}} \mathrm{d}x = -\frac{2}{15} \times \left[\ln\left|4-5\,\mathrm{e}^{3x}\right|\right]_0^{\ln 2} = -\frac{2}{15} \times \left[\ln\left|4-5\,\mathrm{e}^{3\ln 2}\right| - \ln\left|4-5\,\mathrm{e}^{0}\right|\right].$$

Attention ! Il ne faut pas oublier d'écrire les valeurs absolues dans le logarithme.

Or $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^{3\ln 2} = \left(\mathrm{e}^{\ln 2}\right)^3 = 2^3 = 8$. D'où

$$B = -\frac{2}{15} \times \left[\ln|4-5\times 8| - \ln|4-5|\right] = -\frac{2}{15} \times \left[\ln|-36| - \ln|-1|\right] = -\frac{2}{15} \times \left[\ln(36) - \ln(1)\right].$$

Or $\ln 1 = 0$. Donc

$$B = -\frac{2}{15} \times \ln(36) = -\frac{2\ln(36)}{15}.$$

*Remarque.* Comme $\ln(36) = \ln(6^2) = 2\ln(6)$, on peut aussi écrire

$$B = -\frac{4\ln 6}{15}.$$

- Calcul de $C = \displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \cos(4x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$ :

On sait que
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\Big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\Big).$$
En prenant $a = x$ et $b = 4x$, on obtient : $\sin(x)\cos(4x) = \dfrac{1}{2}\Big(\sin(5x) + \sin(-3x)\Big)$.

Puis, comme sinus est une fonction impaire (donc $\sin(-t) = -\sin(t)$ pour tout réel $t$), on trouve :
$$\sin(x)\cos(4x) = \frac{1}{2}\Big(\sin(5x) - \sin(3x)\Big).$$

Ainsi, par linéarité,
$$C = \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin(5x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin(3x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Or une primitive de $u'\sin u$ est $-\cos u$. En prenant d'abord $u(x) = 5x$ (et donc $u'(x) = 5$), puis ensuite $u(x) = 3x$ (et donc $u'(x) = 3$), on obtient :
$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} \times \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 5\sin(5x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3} \times \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 3\sin(3x)\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} \times \Big[-\cos(5x)\Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} - \frac{1}{3} \times \Big[-\cos(3x)\Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\right).$$
D'où
$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} \times \left[-\cos(5\pi) + \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right] - \frac{1}{3} \times \Big[-\cos(3\pi) + \cos(2\pi)\Big]\right).$$
Or on a :

- ▶ $\cos(5\pi) = \cos(\pi + 4\pi) = \cos(\pi) = -1$ ;
- ▶ $\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ ;
- ▶ $\cos(3\pi) = \cos(\pi + 2\pi) = \cos(\pi) = -1$ ;
- ▶ $\cos(2\pi) = \cos(0) = 1$.

Finalement
$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} \times \left[+1 - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{3} \times \Big[+1+1\Big]\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10} - \frac{2}{3}\right).$$
Conclusion.
$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{30} - \frac{20}{30}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{-17}{30} = -\frac{17}{60}.$$

- Calcul de $D = \int_1^4 \left(x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 \mathrm{d}x$ :

On sait que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Donc

$$\left(x - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^2 = x^2 - \frac{6x}{\sqrt{x}} + \frac{9}{x} = x^2 - \frac{6 \times \sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{9}{x} = x^2 - 6\sqrt{x} + \frac{9}{x}.$$

Ainsi par linéarité on obtient :

$$D = \int_1^4 x^2 \,\mathrm{d}x - 6 \times \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + 9 \times \int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Calculons ces trois intégrales séparément :

▶ $D_1 = \int_1^4 x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{64-1}{3} = \frac{63}{3} = \frac{3 \times 21}{3} = 21.$

▶ $D_2 = \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x.$

On sait qu'une primitive de $u'u^\alpha$ pour $\alpha \neq -1$ est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

En posant ici $\alpha = \frac{1}{2}$ et $u(x) = x$, on a donc $u'(x) = 1$. Par conséquent,

$$D_2 = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3} \times \left[x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4.$$

Or $x^{\frac{3}{2}} = x^{1+\frac{1}{2}} = x^1 \times x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$. Alors

$$D_2 = \frac{2}{3} \times \left[4\sqrt{4} - 1\sqrt{1}\right] = \frac{2}{3} \times \left[4 \times 2 - 1\right] = \frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3}.$$

▶ $D_3 = \int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

En posant ici $u(x) = x$, on a donc $u'(x) = 1$, ce qui permet d'écrire :

$$D_3 = \Big[\ln|x|\Big]_1^4 = \Big[\ln(x)\Big]_1^4 = \ln 4 - \ln 1.$$

Or $\ln 1 = 0$. Donc $D_3 = \ln 4$.

Conclusion.

$$D = D_1 - 6D_2 + 9D_3 = 21 - 6 \times \frac{14}{3} + 9\ln 4.$$

Autrement dit,

$$D = 21 - \frac{2 \times 3 \times 14}{3} + 9\ln 4 = 21 - 2 \times 14 + 9\ln 4 = 21 - 28 + 9\ln 4 = 9\ln 4 - 7.$$

*Remarque.* Comme $\ln 4 = \ln(2^2) = 2\ln 2$, on peut aussi écrire

$$D = 18\ln 2 - 7.$$

**Exercice 2 ($\simeq 4$ points).** Calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{0} (3x+1)\ \mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}x$.

On va appliquer la formule d'IPP :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, on pose $u(x) = 3x+1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-4x}$.

Attention ! Ras-le-bol de voir dans les copies des étudiants qui commencent par donner $u(x)$ et $v(x)$, et qui enchainent en donnant $u'(x)$ et $v'(x)$. Il faut absolument commencer par donner $u(x)$ et $v'(x)$, et c'est ensuite qu'on en déduit $u'(x)$ et $v(x)$.

Comme $u(x) = 3x+1$, on obtient $u'(x) = 3$.

De plus, $v'(x) = \mathrm{e}^{-4x} = -\frac{1}{4}\times(-4\,\mathrm{e}^{-4x})$. Puisqu'une primitive de $w'\,\mathrm{e}^{w}$ est $\mathrm{e}^{w}$, on prend $v(x) = -\frac{1}{4}\times\mathrm{e}^{-4x}$ en ayant pris $w(x) = -4x$.

La formule d'IPP donne alors :

$$I = \int_{-\frac{1}{4}}^{0} (3x+1)\ \mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}x = \left[\Big(3x+1\Big)\times\left(-\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-4x}\right)\right]_{-\frac{1}{4}}^{0} - \int_{-\frac{1}{4}}^{0} 3\times\left(-\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-4x}\right)\mathrm{d}x.$$

Attention ! Dans le crochet précédent, il est essentiel d'écrire $3x+1$ entre parenthèses pour respecter les règles de priorité avec la multiplication qui suit.

D'où

$$I = -\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{0} - \left(3\times\frac{-1}{4}+1\right)\times\left(-\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{1}\right) + \frac{3}{4}\times\int_{-\frac{1}{4}}^{0}\mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\,\mathrm{e} + \frac{3}{4}\times\frac{-1}{4}\times\int_{-\frac{1}{4}}^{0}(-4)\,\mathrm{e}^{-4x}\,\mathrm{d}x.$$

Finalement

$$I = -\frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}}{16} - \frac{3}{16}\times\Big[\mathrm{e}^{-4x}\Big]_{-\frac{1}{4}}^{0} = -\frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}}{16} - \frac{3}{16}\Big(1-\mathrm{e}\Big) = -\frac{1}{4} + \frac{\mathrm{e}}{16} - \frac{3}{16} + \frac{3\,\mathrm{e}}{16}.$$

Conclusion.

$$I = \frac{4\,\mathrm{e}}{16} - \frac{4}{16} - \frac{3}{16} = \frac{4\,\mathrm{e}}{16} - \frac{7}{16} = \frac{4\,\mathrm{e}-7}{16}.$$

**Exercice 3 ($\simeq 5,5$ points).**

1. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x$.
   Déterminons une primitive $F$ de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$. Commençons par rappeler que :

   $$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big).$$

   En prenant $a = x$ et $b = x$, on obtient : $f(x) = \sin^2 x = \sin(x)\times\sin(x) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(0) - \cos(2x)\Big)$.

   Comme $\cos(0) = 1$, on obtient $f(x) = \dfrac{1}{2}\Big(1-\cos(2x)\Big) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\times\cos(2x)$.

Or une primitive de $u' \cos u$ est $\sin u$. Ici on va prendre $u(x) = 2x$, et donc $u'(x) = 2$. Par conséquent, en remarquant que

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \cos(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 2\cos(2x),$$

on peut choisir pour primitive :

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \times \sin(2x).$$

2. Calcul de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

   On va appliquer la formule d'IPP :

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, \mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, \mathrm{d}x.$$

   Pour cela, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = f(x) = \sin^2 x$.

   Comme $u(x) = x$, on obtient $u'(x) = 1$.

   De plus, en utilisant la question 1, on peut prendre $v(x) = F(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \times \sin(2x)$.

   La formule d'IPP donne alors :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \left[x \times \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \times \sin(2x)\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \times \sin(2x)\right) \mathrm{d}x.$$

   En utilisant notamment la linéarité sur la dernière intégrale, on obtient :

$$J = \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \times \sin(\pi)\right) - 0 - \frac{1}{2} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \, \mathrm{d}x.$$

   Or $\sin \pi = 0$. Donc :

$$J = \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(2x) \, \mathrm{d}x.$$

   Cela donne encore en exploitant le fait qu'une primitive de $u' \sin u$ est $-\cos u$ (avec encore $u(x) = 2x$, et donc $u'(x) = 2$) :

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi^2}{8} - 0\right) + \frac{1}{8} \times \Big[-\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

   Alors

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{8} \times \Big(-\cos(\pi) + \cos(0)\Big).$$

   Or $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$. D'où

$$J = \frac{2\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{8} \times \Big(1 + 1\Big) = \frac{\pi^2}{16} + \frac{2}{8} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}.$$

   *Remarque.* On peut aussi écrire

$$J = \frac{\pi^2}{16} + \frac{4}{16} = \frac{\pi^2 + 4}{16}.$$

**Fin du corrigé.**