Exercice 1 ($\simeq$ 5 points). On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

- Calcul du déterminant de A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Dans le but de faire apparaitre un deuxième zéro sur la ligne L_2, on effectue $C_1 := C_1 - 2 \times C_3$ pour obtenir :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

En développant ce dernier déterminant par rapport à L_2, on trouve :

$$\det(A) = 1 \times (-1) \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -\Big(3 \times 1 - (-1) \times (-2)\Big) = -1.$$

Comme $\det(A) = -1 \neq 0$, la matrice A est inversible.

- Calcul de l'inverse de A :

Pour calculer l'inverse de la matrice A, on procède comme en TD : on va résoudre l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & - & 2y & - & z & = & a & L_1 \quad \text{(en rouge le pivot)} \\ 2x & & & + & z & = & b & L_2 \\ -3x & + & y & - & z & = & c & L_3 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} -5x & & & - & 3z & = & a+2c & \text{en ayant utilisé } L_1 := L_1 + 2 \times L_3 \\ 2x & & & + & z & = & b & L_2 \\ -3x & + & y & - & z & = & c & L_3 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} x & & & & & = & a+2c+3b & \text{en ayant utilisé } L_1 := L_1 + 3 \times L_2 \\ 2x & & & + & z & = & b & L_2 \\ -3x & + & y & - & z & = & c & L_3 \end{array} \right.$$

On remplace x par $a+3b+2c$ dans L_2 ce qui donne $z = b - 2x = b - 2(a+3b+2c) = -2a-5b-4c$.

On remplace x par $a+3b+2c$ et z par $-2a-5b-4c$ dans L_3 et on obtient

$$y = c + 3x + z = c + 3(a+3b+2c) - 2a - 5b - 4c = a + 4b + 3c.$$

En résumé on a obtenu $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & a+3b+2c \\ y & = & a+4b+3c \\ z & = & -2a-5b-4c \end{array} \right.$

Ce dernier système s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Autrement dit,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 ($\simeq 8$ points).

1. On considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 1 \\ -x & + & 2y & + & z & = & -2 \\ 4x & - & 5y & + & 9z & = & 4 \end{cases}$$

$$(S) \iff \begin{cases} & & y & + & 6z & = & -3 & \text{en ayant effectué } L_1 := L_1 + 2 \times L_2 \\ -x & + & 2y & + & z & = & -2 & L_2 \\ & & 3y & + & 13z & = & -4 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 + 4 \times L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} & & y & + & 6z & = & -3 & L_1 \\ -x & + & 2y & + & z & = & -2 & L_2 \\ & & & - & 5z & = & 5 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 - 3 \times L_1 \end{cases}$$

La dernière équation (L_3) donne $z = -\frac{5}{5} = -1$.

On injecte cette valeur dans la première équation (L_1) pour obtenir :

$$y = -3 - 6z = -3 + 6 = 3.$$

Finalement la deuxième équation (L_2) nous permet de déterminer x :

$$x = 2y + z + 2 = 6 - 1 + 2 = 7.$$

Par conséquent le système (S) admet un seul triplet solution :

$$(x, y, z) = (7; 3; -1).$$

Interprétation géométrique : chacune des équations du système initial étant l'équation d'un plan dans l'espace, la résolution du système correspond à la recherche de l'intersection de trois plans ; ici l'intersection est réduite au seul point de coordonnées $(7; 3; -1)$.

2. On considère le système (S') suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & 7y & - & 2z & = & -3 \\ -3x & - & 8y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$(S') \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 2 & \\ & & 5y & - & 4z & = & -7 & \text{en ayant effectué } L_2 := L_2 - 2\times L_1 \\ & - & 5y & + & 4z & = & 7 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 + 3\times L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & y & + & z & = & 2 & L_1 \\ & & 5y & - & 4z & = & -7 & L_2 \\ & & & & 0 & = & 0 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} 5y = 4z - 7 \quad \text{avec } L_2 \\ x = 2 - y - z \quad \text{avec } L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y = \frac{4}{5}z - \frac{7}{5} \\ x = 2 - \left(\frac{4}{5}z - \frac{7}{5}\right) - z = 2 - \frac{4}{5}z + \frac{7}{5} - z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} y = \frac{4}{5}z - \frac{7}{5} \\ x = \frac{-4-5}{5}z + \frac{10+7}{5} = -\frac{9}{5}z + \frac{17}{5} \end{array}\right.$$

Par conséquent les triplets (x, y, z) qui sont solutions du système (S') s'écrivent sous la forme :

$$(x, y, z) = \left(-\frac{9}{5}z + \frac{17}{5}; \frac{4}{5}z - \frac{7}{5}; z\right)$$

avec z un réel quelconque.

Interprétation : chacune des équations du système initial étant l'équation d'un plan dans l'espace, la résolution du système correspond à la recherche de l'intersection de trois plans ; ici l'intersection donne une droite. En effet, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{5}z + \frac{17}{5} \\ \frac{4}{5}z - \frac{7}{5} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi les solutions du système correspondent aux points de LA droite passant par le point de coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{17}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarque. Ci-dessus j'ai exprimé les triplets solutions en fonction de z. Certains les ont peut-être exprimés en fonction de x ; dans ce cas, ils ont écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -\frac{4}{9}x + \frac{1}{9} \\ -\frac{5}{9}x + \frac{17}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{17}{9} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{9} \\ -\frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

D'autres les ont peut-être exprimés en fonction de y ; dans ce cas, ils ont écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4}y + \frac{1}{4} \\ y \\ \frac{5}{4}y + \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Dans tous les cas, cela donne évidemment la même droite.

Exercice 3 ($\simeq 7$ points). Étant donné un réel m, on considère la matrice A_m de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A_m = \begin{pmatrix} m-1 & 2+m & 2-2m \\ m-1 & -1 & 5-m \\ m+3 & m-4 & m+1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcul du déterminant de la matrice A_m :

$$\begin{aligned}
\det(A_m) &= \begin{vmatrix} m-1 & 2+m & 2-2m \\ m-1 & -1 & 5-m \\ m+3 & m-4 & m+1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 3+m & -3-m \\ m-1 & -1 & 5-m \\ m+3 & m-4 & m+1 \end{vmatrix} && \text{en ayant effectué } L_1 := L_1 - L_2 \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -3-m \\ m-1 & 4-m & 5-m \\ m+3 & 2m-3 & m+1 \end{vmatrix} && \text{en ayant effectué } C_2 := C_2 + C_3 \\
&= (-3-m) \times (+1) \times \begin{vmatrix} m-1 & 4-m \\ m+3 & 2m-3 \end{vmatrix} && \text{en ayant développé par rapport à } L_1
\end{aligned}$$

D'où

$$\det(A_m) = (-3-m) \times \Big[(m-1)(2m-3) - (m+3)(4-m)\Big]$$

$$\det(A_m) = -(m+3)\Big[2m^2 - 3m - 2m + 3 - 4m + m^2 - 12 + 3m\Big]$$

$$\det(A_m) = -(m+3)(3m^2 - 6m - 9) = -3(m+3)(m^2 - 2m - 3).$$

2. La matrice A_m est inversible si et seulement si $\det(A_m) \neq 0$. Or $\det(A_m) = -3(m+3)(m^2-2m-3)$.

   Donc $\det(A_m) = 0$ ssi $m + 3 = 0$ ou $m^2 - 2m - 3 = 0$, c'est-à-dire ssi $m = -3$ ou $m^2 - 2m - 3 = 0$.

   Pour $m^2 - 2m - 3 = 0$, on calcule le discriminant : $\Delta = 4 + 12 = 16$ puis on en déduit les deux solutions :

$$m_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad m_2 = \frac{2+4}{2} = 3.$$

   Ainsi A_m est inversible pour tout réel m différent de -3, de -1 et de 3.

Fin du corrigé