Exercice 1 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) \quad = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ -2 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième colonne, on obtient

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda) \times (+1) \times \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 2 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

ce qui donne :

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)\Big[(2-\lambda) \times (-5-\lambda) + 6\Big]$$

$$P_A(\lambda) = (3-\lambda)\Big[\lambda^2 + 3\lambda - 10 + 6\Big] = (3-\lambda)\Big[\lambda^2 + 3\lambda - 4\Big].$$

2. On sait que λ est une valeur propre de A ssi $P_A(\lambda) = 0$.
Or, puisque $P_A(\lambda) = (3-\lambda)\Big[\lambda^2 + 3\lambda - 4\Big]$, on a

$$\begin{array}{lllll} P_A(\lambda) = 0 & \text{ssi} & 3-\lambda = 0 & \text{ou} & \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \\ & \text{ssi} & \lambda = 3 & \text{ou} & \lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0. \end{array}$$

Pour l'équation $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$, on calcule le discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, puis on en déduit les solutions $\dfrac{-3-5}{2} = -4$ et $\dfrac{-3+5}{2} = 1$.

Les valeurs propres de A sont donc 3 ; 1 et -4.

3. • Espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 :

$$\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 &\iff AV = 3V \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2x & & & - & 3z & = 3x \\ -2x & + & 3y & + & z & = 3y \\ 2x & & & - & 5z & = 3z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrl} & - & 3z & = x \\ -2x & + & z & = 0 \\ 2x & & & = 8z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x = -3z \\ 6z + z = 0 \\ -6z = 8z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x = -3z \\ 7z = 0 \\ 14z = 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} z = 0 \\ x = -3 \times 0 = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 &\iff x = 0 \ \text{ et } \ z = 0 \\
&\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'où E_3 est la droite vectorielle portée par le vecteur $\vec{u}_1$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 :

$$
\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff AV = V \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2x & & & - & 3z & = x \\ -2x & + & 3y & + & z & = y \\ 2x & & & - & 5z & = z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} -3z = -x \\ -2x + 2y + z = 0 \\ 2x = 6z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 3z \\ -6z + 2y + z = 0 \\ x = 3z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 3z \\ 2y = 5z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 3z \\ y = \frac{5}{2}z \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff x = 3z \ \text{ et } \ y = \tfrac{5}{2}z \\
&\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ \frac{5}{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

D'où E_1 est la droite vectorielle portée par le vecteur $\vec{u}_2$ où $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Espace propre E_{-4} associé à la valeur propre -4 :

$$
\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-4} &\iff AV = -4V \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 2x & & & - & 3z & = -4x \\ -2x & + & 3y & + & z & = -4y \\ 2x & & & - & 5z & = -4z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} -3z = -6x \\ -2x + 7y + z = 0 \\ 2x = z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} z = 2x \\ -2x + 7y + 2x = 0 \\ z = 2x \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} z = 2x \\ y = 0 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-4} \iff z = 2x \text{ et } y = 0$$

$$\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

D'où E_{-4} est la droite vectorielle portée par le vecteur $\vec{u}_3$ où $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. A est diagonalisable car A est une matrice de taille 3 possédant trois valeurs propres distinctes.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors on peut vérifier que P est inversible et :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) \quad &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & 2 \\ -1 & 5-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -2 \\ -1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} \quad \text{en ayant effectué } L_1 := L_1 + L_2 \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 6-\lambda & -2 \\ -1 & 4 & -\lambda \end{vmatrix} \quad \text{en ayant effectué } C_2 := C_2 - C_1
\end{aligned}$$

En développant par rapport à la première ligne, on obtient

$$P_B(\lambda) = (2-\lambda) \times (+1) \times \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix}$$

ce qui donne :

$$P_B(\lambda) = (2-\lambda) \times (+1) \times \Big[-\lambda(6-\lambda) + 8 \Big] = (2-\lambda) \times \Big[\lambda^2 - 6\lambda + 8 \Big].$$

2. On sait que λ est une valeur propre de B ssi $P_B(\lambda) = 0$.
Or, puisque $P_B(\lambda) = (2-\lambda) \times \Big[\lambda^2 - 6\lambda + 8\Big]$, on a

$$\begin{aligned}
P_B(\lambda) = 0 \quad & \text{ssi} \quad 2 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \\
& \text{ssi} \quad \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0
\end{aligned}$$

Pour l'équation $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, on calcule le discriminant $\Delta = 36 - 32 = 4$, puis on en déduit les solutions $\dfrac{+6-2}{2} = 2$ et $\dfrac{+6+2}{2} = 4$. Ainsi

$$P_B(\lambda) = 0 \quad \text{ssi} \quad \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 4$$

Les valeurs propres de B sont donc 4 (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double).

3. • Espace propre E_4 associé à la valeur propre 4 :

$$
\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \iff\ & BV = 4V \\
\iff\ & \left\{ \begin{array}{rcrcrl} 3x & - & 3y & + & 2z & = 4x \\ -x & + & 5y & - & 2z & = 4y \\ -x & + & 3y & & & = 4z \end{array} \right. \\
\iff\ & \left\{ \begin{array}{rcrcrll} -x & - & 3y & + & 2z & = 0 & L_1 \\ -x & + & y & - & 2z & = 0 & L_2 \\ -x & + & 3y & - & 4z & = 0 & L_3 \end{array} \right. \\
\iff\ & \left\{ \begin{array}{rcrcrll} -x & - & 3y & + & 2z & = 0 & L_1 \\ & & 4y & - & 4z & = 0 & \text{en ayant effectué } L_2 := L_2 - L_1 \\ & & 6y & - & 6z & = 0 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 - L_1 \end{array} \right. \\
\iff\ & \left\{ \begin{array}{l} -x - 3y + 2z = 0 \\ y = z \\ y = z \end{array} \right. \\
\iff\ & \left\{ \begin{array}{l} -x - 3z + 2z = 0 \\ y = z \end{array} \right. \\
\iff\ & \left\{ \begin{array}{l} x = -z \\ y = z \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_4 \iff\ & x = -z \text{ et } y = z \\
\iff\ & V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

D'où E_4 est la droite vectorielle portée par le vecteur $\vec{u}_1$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 :

$$\begin{aligned}
V=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_2 &\iff BV=2V\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrl} 3x & - & 3y & + & 2z & =2x\\ -x & + & 5y & - & 2z & =2y\\ -x & + & 3y & & & =2z\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrll} x & - & 3y & + & 2z & =0 & L_1\\ -x & + & 3y & - & 2z & =0 & L_2\\ -x & + & 3y & - & 2z & =0 & L_3\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} x-3y+2z=0 \quad L_1 & \\ 0=0 & \text{en ayant effectué } L_2:=L_2+L_1\\ 0=0 & \text{en ayant effectué } L_3:=L_3+L_1\end{array}\right.\\
&\iff x=3y-2z\\
&\iff V=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3y-2z\\ y\\ z\end{pmatrix}\\
&\iff V=y\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix} \text{ avec } y\in\mathbb{R} \text{ et } z\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'où E_2 est le plan vectoriel dirigé par les vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ où $\vec{u}_2=\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3=\begin{pmatrix} -2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.

4. ★ Première rédaction possible :
   Les espaces propres E_4 et E_2 fournissent, en tout, trois vecteurs propres : les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$. Comme les espaces propres fournissent trois vecteurs pour une matrice de départ B qui est de taille 3, la matrice B est diagonalisable.

   ★ Seconde rédaction possible :
   L'espace propre E_4 est une droite vectorielle ; on a donc $\dim(E_4)=1$.
   L'espace propre E_2 est un plan vectoriel ; on a donc $\dim(E_2)=2$.
   Puisque $\dim(E_4)+\dim(E_2)=1+2=3$ et que B est de taille 3, B est diagonalisable.

5. On pose $P=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Alors on peut vérifier que P est inversible et :

$$D=P^{-1}BP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Exercice 3 ($\simeq 6,5$ points). Étant donné un réel a, on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a-4 & 0 \\ 1 & a-5 & 1 \\ 3 & 4-a & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & a-4 & 0 \\ 1 & a-5-\lambda & 1 \\ 3 & 4-a & 2-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ 1 & a-5-\lambda & 1 \\ 3 & 4-a & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{en ayant effectué } L_1 := L_1 + L_3 \\
&= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & a-5-\lambda & 0 \\ 3 & 4-a & -1-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{en ayant effectué } C_3 := C_3 - C_1
\end{aligned}$$

La matrice étant triangulaire dans le dernier déterminant, on obtient immédiatement :

$$P_M(\lambda) = (2-\lambda)(a-5-\lambda)(-1-\lambda).$$

2. On sait que λ est une valeur propre de M ssi $P_M(\lambda) = 0$.
Or, puisque $P_M(\lambda) = (2-\lambda)(a-5-\lambda)(-1-\lambda)$, on a

$$\begin{array}{lllllll} P_M(\lambda) = 0 & \text{ssi} & 2-\lambda = 0 & \text{ou} & a-5-\lambda = 0 & \text{ou} & -1-\lambda = 0 \\ & \text{ssi} & \lambda = 2 & \text{ou} & \lambda = a-5 & \text{ou} & \lambda = -1 \end{array}$$

Par conséquent -1 et 2 sont forcément des valeurs propres de M.

★ Si $a-5 = -1$, c'est-à-dire si $a = 4$, alors M possède exactement deux valeurs propres :
2 (valeur propre simple) et -1 (valeur propre double).

★ Si $a-5 = 2$, c'est-à-dire si $a = 7$, alors M possède exactement deux valeurs propres :
-1 (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double).

★ Si $a-5$ est différent à la fois de -1 et de 2, c'est-à-dire si $a \neq 4$ et $a \neq 7$, alors M possède trois valeurs propres distinctes : -1, 2 et $a-5$.

3. • Dans le cas où $a \neq 4$ et $a \neq 7$, on vient de voir que M possède trois valeurs propres distinctes. Comme M est de taille 3, on sait que M est obligatoirement diagonalisable.

• Dans le cas où $a = 4$, M possède deux valeurs propres -1 et 2.
La valeur propre 2 est simple ; on est donc sûr que l'espace propre E_2 est une droite et qu'il fournira un vecteur.
Par conséquent, pour savoir si M est diagonalisable, il suffit de déterminer l'espace propre E_{-1} : en effet, si c'est une droite, M ne sera pas diagonalisable (car les espaces propres E_{-1} et E_2 ne fourniront, en tout, que deux vecteurs) ; si c'est un plan, M sera diagonalisable (car les espaces propres E_{-1} et E_2 fourniront bien trois vecteurs).

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff MV = -V$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -x & & & & & = -x \\ x & - & y & + & z & = -y \\ 3x & & & + & 2z & = -z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ z = -x \\ z = -x \end{array} \right.$$

$$\iff z = -x$$

Par conséquent

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

D'où E_{-1} est le plan vectoriel dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion. Lorsque $a = 4$, M est diagonalisable.

• Dans le cas où $a = 7$, M possède deux valeurs propres -1 (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double). En suivant un raisonnement analogue à celui effectué pour le cas $a = 4$, il suffit de déterminer l'espace propre E_2 pour savoir si M est diagonalisable : si c'est une droite, M ne sera pas diagonalisable ; si c'est un plan, M sera diagonalisable.

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \iff MV = 2V$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -x & + & 3y & & & = 2x \\ x & + & 2y & + & z & = 2y \\ 3x & - & 3y & + & 2z & = 2z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrl} -3x & + & 3y & & & = 0 \\ x & & & + & z & = 0 \\ 3x & - & 3y & & & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = -x \\ y = x \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = -x \end{array} \right.$$

$$\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.$$

D'où E_2 est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Conclusion. Lorsque $a = 7$, M n'est pas diagonalisable.

- En résumé, M est diagonalisable ssi $a \in \mathbb{R} \setminus \{7\}$.

Fin du corrigé