

- Aucun document autorisé
- Calculatrice et téléphone portable interdits
- Toutes les réponses devront être justifiées
- **La rédaction comptera pour une part non négligeable de la note**
- Énoncé à rendre avec la copie

Nom :

Prénom :

**Exercice 1** ( $\simeq 6,75$  points). On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de  $A$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
3. Pour chacune des valeurs propres, déterminer avec précision le sous-espace propre associé, c'est-à-dire en donner une interprétation précise en terme de droite, plan...
4. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer, si cela est possible, une matrice inversible  $P$  telle que  $D = P^{-1}AP$  soit diagonale. Que vaut  $D$ ? (il n'est pas demandé de vérifier que  $P$  est inversible, ni de calculer la matrice inverse de  $P$ , ni de faire le calcul explicite de  $P^{-1}AP$ )

**Exercice 2** ( $\simeq 6,75$  points). On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de  $B$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $B$ .
3. Pour chacune des valeurs propres, déterminer avec précision le sous-espace propre associé, c'est-à-dire en donner une interprétation précise en terme de droite, plan...
4. La matrice  $B$  est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer, si cela est possible, une matrice inversible  $P$  telle que  $D = P^{-1}BP$  soit diagonale. Que vaut  $D$ ? (il n'est pas demandé de vérifier que  $P$  est inversible, ni de calculer la matrice inverse de  $P$ , ni de faire le calcul explicite de  $P^{-1}BP$ )

**Exercice 3** ( $\simeq 6,5$  points). Étant donné un réel  $a$ , on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & a-4 & 0 \\ 1 & a-5 & 1 \\ 3 & 4-a & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de  $M$ .
2. Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  la matrice  $M$  possède-t-elle exactement deux valeurs propres ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  la matrice  $M$  est-elle diagonalisable ? Pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  la matrice  $M$  n'est-elle pas diagonalisable ?