Exercice 1 ($\simeq 5$ points).

1. Calcul de $\ell = \dfrac{\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{4}}{5 + \dfrac{1}{5}}$.

$$\ell = \frac{\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{12}}{\dfrac{25+1}{5}} = \frac{\dfrac{3 \times 6}{2 \times 6} - \dfrac{5}{12}}{\dfrac{26}{5}} = \frac{\dfrac{18-5}{12}}{\dfrac{26}{5}} = \frac{\dfrac{13}{12}}{\dfrac{26}{5}} = \frac{13}{12} \times \frac{5}{26}.$$

Finalement
$$\ell = \frac{13 \times 5}{12 \times 2 \times 13} = \frac{5}{12 \times 2} = \frac{5}{24}.$$

2. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{12 - 5x}{4 - x} = \dfrac{5}{3}$.

Remarquons d'abord que l'équation est définie pour $4 - x \neq 0$ c'est-à-dire pour $x \neq 4$.

$\dfrac{12-5x}{4-x} = \dfrac{5}{3}$ si et seulement si $12 - 5x = \dfrac{5}{3}(4 - x)$ en multipliant par $4 - x$ des deux côtés ;

ssi $3(12 - 5x) = 5(4 - x)$ en multipliant par 3 des deux côtés ;

ssi $36 - 15x = 20 - 5x$;
ssi $36 - 20 = -5x + 15x$;
ssi $16 = 10x$;

ssi $x = \dfrac{16}{10}$ en divisant par 10 des deux côtés ;

ssi $x = \dfrac{8 \times 2}{5 \times 2} = \dfrac{8}{5}$.

3. Détermination de l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3 - \ln(7 - x)}$.

On peut calculer l'expression $f(x) = \sqrt{3 - \ln(7 - x)}$

si et seulement si on peut, à la fois, calculer $\ln(7 - x)$ et prendre la racine carrée de $3 - \ln(7 - x)$.

Tout d'abord, on sait que $\ln(t)$ est définie ssi $t > 0$. On peut donc calculer $\ln(7 - x)$ si et seulement si $7 - x > 0$, c'est-à-dire ssi $7 > x$, c'est-à-dire ssi $x < 7$.

Ensuite, on sait que $\sqrt{t}$ est définie ssi $t \geqslant 0$. Par conséquent, pour tout réel $x < 7$, on peut donc prendre la racine carrée de $3 - \ln(7 - x)$ si et seulement si $3 - \ln(7 - x) \geqslant 0$,

ssi $3 \geqslant \ln(7 - x)$,
ssi $\mathrm{e}^3 \geqslant \mathrm{e}^{\ln(7-x)}$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$,
ssi $\mathrm{e}^3 \geqslant 7 - x$ car $\mathrm{e}^{\ln t} = t$ pour tout réel $t > 0$,
ssi $\mathrm{e}^3 + x \geqslant 7$,
ssi $x \geqslant 7 - \mathrm{e}^3$.

Conclusion. On peut calculer l'expression $f(x) = \sqrt{3 - \ln(7 - x)}$ ssi $x < 7$ et $x \geqslant 7 - \mathrm{e}^3$.

D'où l'ensemble de définition de f est :

$$D_f = \left[7 - \mathrm{e}^3 ; 7\right[.$$

Exercice 2 ($\simeq 10$ points). On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(6 - x^2\right) \mathrm{e}^{-2x}$$

1. f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = 6 - x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.
   Pour commencer, on a $u'(x) = 0 - 2x = -2x$.
   Ensuite, en utilisant la formule $(\mathrm{e}^w)' = w' \,\mathrm{e}^w$ avec $w(x) = -2x$ (et donc $w'(x) = -2$), on obtient $v'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x}$.
   Par conséquent,

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = -2x \times \mathrm{e}^{-2x} + \left(6 - x^2\right) \times \left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right).$$

   Finalement, en factorisant par $-2\,\mathrm{e}^{-2x}$, on obtient :

$$f'(x) = -2x \times \mathrm{e}^{-2x} + \left(6 - x^2\right) \times \left(-2\,\mathrm{e}^{-2x}\right) = -2\,\mathrm{e}^{-2x} \times \left(x + 6 - x^2\right) = 2\left(x^2 - x - 6\right)\mathrm{e}^{-2x}.$$

2. a) Calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(6 - x^2\right) \mathrm{e}^{-2x}$.

   On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (6 - x^2) = -\infty$.
   Par ailleurs, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-2x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{t} = +\infty$.
   Conclusion. Par produit des limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

   b) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(6 - x^2\right) \mathrm{e}^{-2x}$.

   Si on procède comme à la question 2.a. on tombe sur la forme indéterminée « $\infty \times 0$ ». Pour contourner ce problème, on écrit différemment $f(x)$:

$$f(x) = \left(6 - x^2\right) \mathrm{e}^{-2x} = 6\,\mathrm{e}^{-2x} - x^2\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

   Remarquons d'abord que $\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 6\,\mathrm{e}^{-2x} = \lim\limits_{t \to -\infty} 6\,\mathrm{e}^{t} = 6 \times 0 = 0$.
   Par ailleurs, le calcul de $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-2x}$ semble lié aux croissances comparées... Voyons cela précisément : le formulaire nous assure que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ pour tout $\alpha > 0$. Pour faire apparaître cette limite dans $f(x)$, modifions encore un peu l'expression donnant $f(x)$:

$$f(x) = 6\,\mathrm{e}^{-2x} - x^2\,\mathrm{e}^{-2x} = 6\,\mathrm{e}^{-2x} - \left(x\,\mathrm{e}^{-x}\right)^2.$$

   Or $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ par croissances comparées à l'infini (précisément ici $\alpha = 1$).
   Par conséquent, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\,\mathrm{e}^{-x}\right)^2 = 0^2 = 0$.
   Finalement, par somme des limites, on obtient :

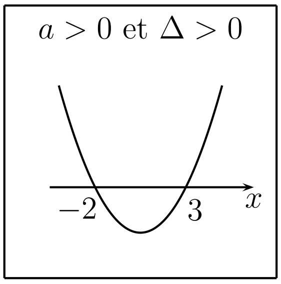
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - 0 = 0.$$

3. On a vu précédemment que $f'(x) = 2\left(x^2 - x - 6\right)\mathrm{e}^{-2x}$. Comme cette expression est un produit, on va déterminer le signe de $f'(x)$ en dressant un tableau de signe ; pour cela, on a besoin de :

   - 2 est toujours > 0.
   - e^{-2x} est toujours > 0 pour tout réel x car e^{t} est toujours strictement positif pour tout réel t (propriété de la fonction exponentielle).

- Signe de $x^2 - x - 6$?

Calcul du discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$.
Les solutions de l'équation $x^2 - x - 6 = 0$ sont $x_1 = \frac{-(-1)-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-(-1)+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$.
Comme $a = 1 > 0$ et $\Delta = 25 > 0$, la parabole d'équation $y = x^2 - x - 6$ est représentée sous cette forme :



Par lecture graphique, on peut affirmer que $x^2 - x - 6 \leqslant 0$ ssi $-2 \leqslant x \leqslant 3$.

- Conclusion. Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
e^{-2x}		$+$		$+$		$+$	
$x^2 - x - 6$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}^4$	$\searrow$	$-3\,\mathrm{e}^{-6}$	$\nearrow$	0

Remarque : $f(-2) = (6-4)\,\mathrm{e}^4 = 2\,\mathrm{e}^4$ et $f(3) = (6-9)\,\mathrm{e}^{-6} = -3\,\mathrm{e}^{-6}$.

4. L'abscisse x d'un éventuel point d'intersection de la courbe C_f et de l'axe des abscisses vérifie obligatoirement $f(x) = 0$.
Or $f(x) = 0$ ssi $\left(6 - x^2\right)\mathrm{e}^{-2x} = 0$
ssi $6 - x^2 = 0$ ou $\mathrm{e}^{-2x} = 0$.

e^t est toujours strictement positif pour tout réel t (propriété de la fonction exponentielle) ; e^t est donc en particulier toujours différent de zéro. Donc :

$$f(x) = 0 \text{ ssi } 6 - x^2 = 0, \text{ ssi } x^2 = 6, \text{ ssi } x = \sqrt{6} \text{ ou } x = -\sqrt{6}.$$

Remarque. Si besoin, on aurait aussi pu résoudre $6 - x^2 = 0$ en calculant un discriminant Δ...

Conclusion. Les points d'intersection de la courbe C_f et de l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(\sqrt{6}; 0)$ et $(-\sqrt{6}; 0)$.

Exercice 3 ($\simeq 5$ points).

On considère sur l'intervalle $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$ la fonction f définie par :

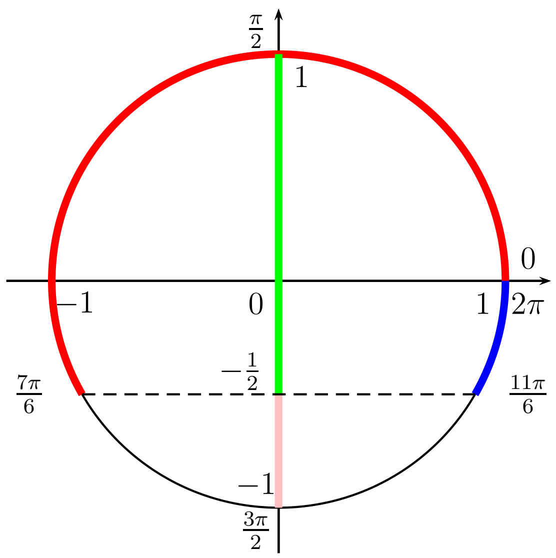
$$f(x) = x - \frac{2}{3}\cos(3x).$$

1. On sait que la dérivée de $\cos(u(x))$ est $-u'(x) \times \sin(u(x))$. Ainsi, en prenant $u(x) = 3x$, on a $u'(x) = 3$ et on voit que la dérivée de $\cos(3x)$ est $-3\sin(3x)$. D'où, pour tout $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$,

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{3} \times (-3)\sin(3x) = 1 + 2\sin(3x).$$

2. La fonction f est strictement croissante là où sa dérivée f' est strictement positive.
Pour tout $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, on a : $f'(x) > 0$ ssi $1 + 2\sin(3x) > 0$, ssi $2\sin(3x) > -1$, ssi $\sin(3x) > -\frac{1}{2}$.

Comme $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, on a $3x \in [0; 2\pi]$.
Considérons un réel t tel que $t \in [0; 2\pi]$ et travaillons avec un cercle trigo. Remarquons d'abord que, pour tout $t \in [0; 2\pi]$, on a $\sin(t) = -\frac{1}{2}$ ssi $t = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$ ou $t = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$.



On constate alors que $\sin(t) > -\frac{1}{2}$ (zone verte) si et seulement si $0 \leqslant t < \frac{7\pi}{6}$ (zone rouge) ou $\frac{11\pi}{6} < t \leqslant 2\pi$ (zone bleue du dessin).

Si on revient à x (en pensant $t = 3x$), on obtient :

$f'(x) > 0$ ssi $\sin(3x) > -\frac{1}{2}$,

ssi $0 \leqslant 3x < \frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{11\pi}{6} < 3x \leqslant 2\pi$,

ssi $0 \leqslant x < \frac{7\pi}{18}$ ou $\frac{11\pi}{18} < x \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

Conclusion. En travaillant sur $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$, la fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $\left[0; \frac{7\pi}{18}\right[$ et sur l'intervalle $\left]\frac{11\pi}{18}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Fin du corrigé