Exercice 1.

1. a) Calculer $\cos\left(\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\arccos(\cos\pi)$ et $\arccos(\cos(3\pi))$.

   b) Calculer $\cos\left(\arccos\dfrac{2}{3}\right)$; $\arccos\left(\cos\dfrac{50\pi}{3}\right)$ et $\arccos\left(\cos\dfrac{67\pi}{7}\right)$.

2. Calculer $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{5}\right)$ et $\arcsin\left(\sin\dfrac{41\pi}{6}\right)$.

Exercice 2.

1. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$. Quel est l'ensemble de définition de f ? Calculer la dérivée de f.
2. Établir que :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Exercice 3. On considère

$$\alpha = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta = \arcsin\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right).$$

1. a) Calculer $\cos\alpha$.

   b) Est-il vrai que $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$? Si tel n'est pas le cas, trouver une relation entre α et $\arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.
2. a) Calculer $\cos\beta$.

   b) Est-il vrai que $\beta = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$? Si tel n'est pas le cas, trouver une relation entre β et $\arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

Exercice 4. Établir les relations suivantes :

a) Pour tout $x \in [-1;1]$, $\quad \sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $\quad \tan(2\arctan x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 5. On considère

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta = 2\arctan(3).$$

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction tangente ? On le notera dans la suite D.
2. Encadrer α, β et $\alpha+\beta$ pour montrer qu'ils appartiennent tous les trois à D.
3. Calculer $\tan\alpha$, $\tan\beta$ et $\tan(\alpha+\beta)$.
4. En déduire la valeur exacte de $\alpha+\beta$.
   On écrira le résultat sans utiliser le symbole arctan.

Exercice A. Ensemble de définition et dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous par :

$$f(x) = \arccos(3x) \quad \text{et} \quad g(x) = x \arcsin(2x).$$

Exercice B. Calculer

$$\theta_1 = \arctan 2 + \arctan 3, \qquad \theta_2 = \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan 2 \qquad \text{et} \qquad \theta_3 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}.$$

N.B. On écrira le résultat sous la forme $\theta = \frac{k\pi}{n}$ avec k et n des entiers tels que la fraction $\frac{k}{n}$ soit irréductible.

Exercice C. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arccos(\cos x) + \frac{1}{2} \arccos(\cos(2x)).$$

Étudier la fonction f afin de tracer sa courbe représentative. On pourra pour cela s'intéresser aux questions suivantes :

1. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
2. La fonction f est-elle périodique ?
3. Peut-on restreindre l'intervalle d'étude ? Si oui, simplifier l'expression donnant $f(x)$ sur cet intervalle.
4. Comment tracer toute la courbe ?

Exercice D. On considère f la fonction définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

a) Étudier la fonction $u : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ (ensemble de définition, dérivée, sens de variations).

b) Étudier la fonction f (ensemble de définition, dérivée, sens de variations).

c) Exprimer, selon les valeurs de x, $f(x)$ en fonction de $\arctan x$.

Exercice E. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\arccos x = \arcsin(2x)$.

b) $\arctan(2x) + \arctan(3x) = -\frac{\pi}{4}$.

c) $\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} = \arcsin x$.

Exercice F. Montrer que, pour tout $x \in [-1; 1[$,

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos x.$$