Exercice 1.

1. a) • $\cos(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   • $\arccos(\cos\pi) = \arccos(-1) = \pi$.
   • $\arccos(\cos(3\pi)) = \arccos(-1) = \pi$.

   b) • $\cos(\arccos\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ car $\frac{2}{3} \in [-1;1]$ et on sait que $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$.

   • $\arccos(\cos\frac{50\pi}{3}) = ?$
   Comme $2\pi = \frac{6\pi}{3}$, on effectue la division euclidienne de 50 par 6 ; cela permet d'écrire $50 = 8\times 6+2$ d'où l'on déduit : $\frac{50\pi}{3} = 8\times 2\pi + \frac{2\pi}{3}$, donc $\cos\frac{50\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3}$. Ainsi $\arccos(\cos\frac{50\pi}{3}) = \arccos(\cos\frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$, car $\frac{2\pi}{3} \in [0;\pi]$ et on sait que $\arccos(\cos x) = x$ pour tout $x \in [0;\pi]$.

   Attention. Il est interdit d'écrire $\frac{50\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ car cela signifierait que $50 = 2$. Par conséquent une rédaction du genre $\arccos(\cos\frac{50\pi}{3}) = \frac{50\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ est complètement foireuse.

   Remarque. Pour ceux qui ont un peu de mal avec le raisonnement fait pour le calcul précédent de $\arccos(\cos\frac{50\pi}{3})$ ou le calcul à venir de $\arccos(\cos\frac{67\pi}{7})$, il ne faut pas hésiter à visionner la vidéo « Arccosinus - exercice 1 » accessible sur ma chaîne Youtube.

   • $\arccos(\cos\frac{67\pi}{7})$?
   $\frac{67\pi}{7} = 10\pi - \frac{3\pi}{7}$, donc $\cos\frac{67\pi}{7} = \cos(-\frac{3\pi}{7})$. Or $\cos(-\frac{3\pi}{7}) = \cos(\frac{3\pi}{7})$ car cosinus est une fonction paire.

   Remarque. Si on préfère, pour la rédaction, on peut annoter un cercle trigo pour expliquer pourquoi $\cos\frac{67\pi}{7} = \cos\frac{3\pi}{7}$.

   Ainsi $\arccos(\cos\frac{67\pi}{7}) = \arccos(\cos\frac{3\pi}{7}) = \frac{3\pi}{7}$, car $\frac{3\pi}{7} \in [0;\pi]$ et on sait que $\arccos(\cos x) = x$ pour tout $x \in [0;\pi]$.

2. • $\sin(\arcsin\frac{1}{5}) = \frac{1}{5}$ car $\frac{1}{5} \in [-1;1]$ et on sait que $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$.

   • $\arcsin(\sin\frac{41\pi}{6})$?
   $\frac{41\pi}{6} = 7\pi - \frac{\pi}{6}$, donc $\sin\frac{41\pi}{6} = \sin(\pi - \frac{\pi}{6})$. Or $\sin(\pi-\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6})$ car $\sin(\pi - x) = \sin x$ pour tout réel x (ou dessiner un cercle trigo pour le voir). Ainsi $\arcsin(\sin\frac{41\pi}{6}) = \arcsin(\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{6}$, car $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et on sait que $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

   Remarque. Ici encore, pour ceux qui le souhaitent, on peut retrouver un exercice du même type dans la vidéo « Arcsinus - exercice 1 » accessible sur ma chaîne Youtube.

Exercice 2. Considérons la fonction f définie par $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$.

1. La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$, donc pour que $f(x)$ soit définie, il suffit que $\frac{1}{x}$ soit définie. D'où $D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

   En utilisant $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$, on obtient pour tout $x \in D_f$:
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + (-\frac{1}{x^2})\times\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

2. D_f est la réunion des deux intervalles $]0;+\infty[$ et $]-\infty;0[$. Sur chacun de ces intervalles, la dérivée de f est nulle. Donc f est constante sur chacun de ces intervalles. Ainsi il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que :
$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{si} \quad x \in]0;+\infty[; \\ c_2 & \text{si} \quad x \in]-\infty;0[. \end{cases}$$
   Or on a par exemple $c_1 = f(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$ et de même $c_2 = f(-1) = -2\arctan(1) = -\frac{\pi}{2}$. D'où :
$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$
   Remarque. Pour ceux qui le souhaitent, la résolution de cet exercice est aussi disponible en vidéo dans la vidéo « Arctangente - quelques démonstrations » accessible sur ma chaîne Youtube.

Exercice 3. On considère
$$\alpha = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta = \arcsin\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right).$$

1. a) $\cos\alpha = \cos\left(2\arccos\frac{3}{4}\right)$.
   On sait que $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$ pour tout réel t. En prenant $t = \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$, on a :
$$\cos\alpha = 2\cos^2\left(\arccos\frac{3}{4}\right) - 1 = 2\times\left(\cos\left(\arccos\frac{3}{4}\right)\right)^2 - 1 = 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8}.$$
   b) On vient de voir que $\cos\alpha = \frac{1}{8}$. On a donc $\arccos(\cos\alpha) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.
   Or on sait que $\arccos(\cos x) = x$ pour tout $x \in [0;\pi]$.
   A-t-on ici $\alpha \in [0;\pi]$? Rappelons que par définition $\alpha = 2\arccos\left(\frac{3}{4}\right)$.
   Tout d'abord, $0 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\arccos 0 > \arccos\left(\frac{3}{4}\right) > \arccos 1$ car arccos est strictement décroissante sur $[-1;1]$. D'où $0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{2}$. On aurait aussi pu obtenir cette double inégalité par lecture de la courbe de la fonction arccos (ou par lecture du cercle trigo).
   Finalement, en multipliant les termes de la double inégalité par 2, on obtient $0 < \alpha < \pi$.

   Conclusion. On a $\alpha \in [0;\pi]$ et donc $\alpha = \arccos(\cos\alpha) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

2. a) $\cos\beta = \cos\left(\arcsin\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)\right)$.
   On sait que $\cos(\arcsin t) = \sqrt{1-t^2}$ pour tout réel $t \in [-1,1]$. En prenant $t = -\frac{3\sqrt{7}}{8}$, on a :
$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{3^2\times 7}{8^2}} = \sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{8}.$$
   b) On vient de voir que $\cos\beta = \frac{1}{8}$. On a donc $\arccos(\cos\beta) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.
   Or on sait que $\arccos(\cos x) = x$ pour tout $x \in [0;\pi]$.
   A-t-on ici $\beta \in [0;\pi]$? Rappelons que par définition $\beta = \arcsin\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)$.
   Tout d'abord, $-1 < -\frac{3\sqrt{7}}{8} < 0$ donc $\arcsin(-1) < \arcsin\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right) < \arcsin 0$ car arcsin est strictement croissante sur $[-1;1]$. D'où $-\frac{\pi}{2} < \arcsin\left(-\frac{3\sqrt{7}}{8}\right) < 0$. On aurait aussi pu obtenir cette double inégalité par lecture de la courbe de la fonction arcsin (ou par lecture du cercle trigo).
   Ainsi $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$.
   Conclusion. On a $\beta \notin [0;\pi]$ et donc $\beta \neq \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

Cependant, on a deux nombres β et $\arccos\left(\frac{1}{8}\right)$ qui ont le même cosinus (qui vaut $\frac{1}{8}$). En dessinant un cercle trigo, on voit qu'il y a deux points du cercle qui donne un cosinus égal à $\frac{1}{8}$. Mais, comme on a vu que $\beta \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ et que $\arccos\left(\frac{1}{8}\right) \in [0; \frac{\pi}{2}]$, on constate que forcément $\beta = -\arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

Remarque. Une autre façon de rédiger la dernière partie de cette question. Comme cosinus est une fonction paire, on a $\cos(-\beta) = \cos\beta$. Donc $\cos(-\beta) = \frac{1}{8}$ puis $\arccos(\cos(-\beta)) = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.
Comme on a vu que $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$, on en déduit que $0 < -\beta < \frac{\pi}{2}$, et en particulier $-\beta \in [0; \pi]$. Ainsi $\arccos(\cos(-\beta)) = -\beta$.
D'où $-\beta = \arccos\left(\frac{1}{8}\right)$, ce qui donne bien $\beta = -\arccos\left(\frac{1}{8}\right)$.

Remarque. Pour des exercices du même genre, voir aussi les vidéos « Arccosinus - exercice 3 » et « Arcsinus - exercice 3 » accessible sur ma chaîne Youtube.

Exercice 4.

a) Comme $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, on a avec $t = \arcsin x$:

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x) \times \cos(\arcsin x).$$

En appliquant les formules du cours, on obtient :

$$\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

b) Comme $\tan(2t) = \frac{2\tan(t)}{1-\tan^2(t)}$, on a avec $t = \arctan x$:

$$\tan(2\arctan x) = \frac{2\tan(\arctan x)}{1-\tan^2(\arctan x)} = \frac{2x}{1-x^2}.$$

c) On sait que $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. Donc $\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t}$. En prenant $t = \arctan x$, on en déduit que

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ainsi

$$\cos(\arctan x) = \pm\sqrt{\frac{1}{1+x^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Attention de ne pas oublier le $\pm$ lorsque l'on fait « sauter » le carré du cosinus. C'est exactement le même raisonnement que lorsqu'on résout l'équation $x^2 = 5$: on a deux solutions $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$.

Or $\arctan x$ est un réel appartenant à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos(\arctan x) \in]0; 1]$ (faire le dessin d'un cercle trigo pour le confirmer). En particulier $\cos(\arctan x) > 0$. D'où finalement :

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 5. On considère

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta = 2\arctan(3).$$

1. C'est du cours ! $\tan x$ est définie pour tous les réels x différents de ceux qui s'écrivent sous la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit,

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. $0 < \frac{3}{5} < 1$ donc $\arcsin 0 < \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) < \arcsin 1$ car arcsin est strictement croissante sur $[-1; 1]$.
Donc $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. On aurait aussi pu obtenir cette double inégalité par lecture de la courbe de la fonction arcsin (ou par lecture du cercle trigo).
Ainsi $\alpha \in D$.

$1 < 3$ donc $\arctan 1 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}$ car arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'où $\frac{\pi}{4} < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}$. On aurait aussi pu obtenir cette double inégalité par lecture de la courbe de la fonction arctan (ou par lecture du cercle trigo).
Par conséquent $2 \times \frac{\pi}{4} < 2\arctan 3 < 2 \times \frac{\pi}{2}$.
D'où $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, et $\beta \in D$.

Comme $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, on obtient par addition $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$. Donc $\alpha + \beta \in D$.

3.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right))}{\cos(\arcsin\left(\frac{3}{5}\right))} = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}.$$

$$\tan\beta = \tan(2\arctan(3)) = \frac{2\tan(\arctan 3)}{1-\tan^2(\arctan 3)} = \frac{2\times 3}{1-3^2} = -\frac{3}{4}.$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta} = 0.$$

4. On sait que $\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$ et que $\tan(\alpha+\beta) = 0$.

Attention. Il est faux d'écrire que $\alpha + \beta = \arctan 0$. En effet, on a vu que $\tan(\alpha+\beta) = 0$. On peut donc écrire que $\arctan(\tan(\alpha+\beta)) = \arctan(0)$. Mais $\arctan(\tan(\alpha+\beta)) \neq \alpha+\beta$ car on a vu à la question 2 que $\alpha + \beta \notin]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

À l'aide du cercle trigo (voir notamment l'axe des tangentes), on constate que π est le seul nombre, compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, qui a sa tangente égale à 0.
Donc forcément $\alpha + \beta = \pi$. D'où

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2\arctan(3) = \pi.$$

Exercice A.

- $f(x) = \arccos(3x)$

$$D_f = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right] \qquad \text{et} \qquad f'(x) = \frac{-3}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

- $g(x) = x \arcsin(2x)$

$$D_g = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \arcsin(2x) + x \times \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

Exercice B. Considérons

$$\theta_1 = \arctan 2 + \arctan 3, \qquad \theta_2 = \arctan \frac{1}{7} + 2\arctan 2 \qquad \text{et} \qquad \theta_3 = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}.$$

Cet exercice est exactement le même exercice que l'exercice 5 sans les questions intermédiaires.

- $\frac{\pi}{4} < \arctan 2 < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{4} < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}$; donc $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$.

$$\tan(\arctan 2 + \arctan 3) = \frac{\tan(\arctan 2) + \tan(\arctan 3)}{1 - \tan(\arctan 2) \times \tan(\arctan 3)} = \frac{5}{1-6} = -1.$$

D'où

$$\theta_1 = \frac{3\pi}{4}.$$

- $0 < \arctan \frac{1}{7} < \frac{\pi}{4}$. Or $\frac{\pi}{4} < \arctan 2 < \frac{\pi}{2}$, donc $\frac{\pi}{2} < 2\arctan 2 < \pi$. D'où $\frac{\pi}{2} < \theta_2 < \frac{5\pi}{4}$.

$$\tan(\arctan \frac{1}{7} + 2\arctan 2) = \frac{\tan(\arctan \frac{1}{7}) + \tan(2\arctan 2)}{1 - \tan(\arctan \frac{1}{7}) \times \tan(2\arctan 2)}.$$

Mais

$$\tan(2\arctan 2) = \frac{2\tan(\arctan 2)}{1 - \tan^2(\arctan 2)} = \frac{2 \times 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$$

Ainsi

$$\tan(\arctan \frac{1}{7} + 2\arctan 2) = \frac{\frac{1}{7} - \frac{4}{3}}{1 + \frac{1}{7} \times \frac{4}{3}} = \frac{3-28}{21+4} = \frac{-25}{25} = -1.$$

D'où

$$\theta_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

- Pour $k = 2$ ou 5 ou 8, on a $k > \sqrt{3}$. Donc $\frac{1}{k} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Alors $0 < \arctan \frac{1}{k} < \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$. D'où $0 < \arctan \frac{1}{k} < \frac{\pi}{6}$. Fianlement $0 < \theta_3 < \frac{\pi}{2}$.

$$\tan(\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5}) = \frac{\tan(\arctan \frac{1}{2}) + \tan(\arctan \frac{1}{5})}{1 - \tan(\arctan \frac{1}{2}) \times \tan(\arctan \frac{1}{5})} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{5+2}{10-1} = \frac{7}{9}.$$

On en déduit que :

$$\tan(\theta_3) = \frac{\frac{7}{9} + \frac{1}{8}}{1 - \frac{7}{9} \times \frac{1}{8}} = \frac{56+9}{72-7} = \frac{65}{65} = 1.$$

D'où

$$\theta_3 = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice C. Considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

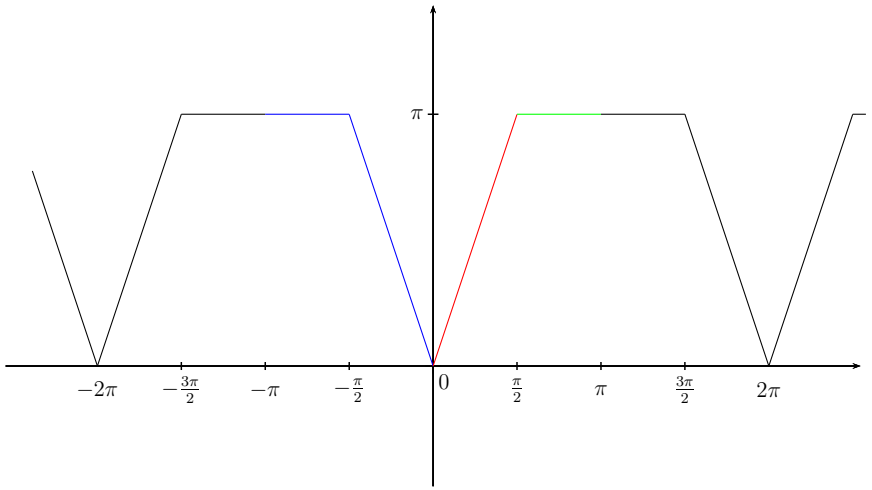
$$f(x) = \arccos(\cos x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos(2x)).$$

f est paire et 2π-périodique. Il suffit d'étudier la fonction sur $[0; \pi]$.

- Si $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, alors $2x \in [0; \pi]$ et on obtient facilement $f(x) = x + \frac{1}{2} \times 2x = 2x$. Voir partie rouge du tracé ci-dessous.

- Si $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, alors $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$. On a alors $\pi \leqslant 2x \leqslant 2\pi$, puis $-2\pi \leqslant -2x \leqslant -\pi$, et enfin $0 \leqslant 2\pi - 2x \leqslant \pi$.
  Comme cos est paire et 2π-périodique, on a $\cos(2x) = \cos(-2x) = \cos(2\pi - 2x)$ avec ici $2\pi - 2x \in [0; \pi]$. Donc $f(x) = x + \frac{1}{2} \times (2\pi - 2x) = \pi$. Voir partie verte du tracé ci-dessous.

- D'où le tracé : la partie bleue obtenue par symétrie axiale (par rapport à l'axe des ordonnées) car fonction paire, puis partie noire obtenue car fonction 2π-périodique.



Exercice D. Considérons f la fonction définie par :

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

a) Étude de la fonction u définie par $u(x) = \frac{2x}{1+x^2}$:
u est impaire sur $D_u = \mathbb{R}$. On pourrait donc étudier u uniquement sur $[0; +\infty[$.

$$u'(x) = 2 \times \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 2 \times \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 2 \times \frac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

b) $D_f = \mathbb{R}$ car $f(x) = \arcsin(u(x))$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $u(x) \in [-1; 1]$.
f est dérivable en tout x où $u(x) \in]-1; 1[$, c'est-à-dire f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

$$f'(x) = 2\times\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = 2\times\frac{1-x^2}{1+x^2}\times\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} = 2\times\frac{1-x^2}{1+x^2}\times\frac{1}{\sqrt{1+x^4-2x^2}}$$

$$f'(x) = 2 \times \frac{1-x^2}{1+x^2} \times \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} = 2 \times \frac{1-x^2}{1+x^2} \times \frac{1}{|1-x^2|} = 2\epsilon(x) \times \frac{1}{1+x^2}$$

avec $\epsilon(x) = \frac{1-x^2}{|1-x^2|} = \pm 1$. Précisément $\epsilon(x) = 1$ si $x \in]-1; 1[$, et $\epsilon(x) = -1$ si $x \notin]-1; 1[$.
Par conséquent :

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2} & \text{si} \quad x < -1; \\ \frac{2}{1+x^2} & \text{si} \quad -1 < x < 1; \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

$$\text{Alors } f \text{ est} \begin{cases} \text{décroissante} & \text{sur} \quad]-\infty; -1[; \\ \text{croissante} & \text{sur} \quad]-1; 1[; \\ \text{décroissante} & \text{sur} \quad]1; +\infty[\end{cases}$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} -2\arctan x + c_1 & \text{si} \quad x < -1; \\ 2\arctan x + c_2 & \text{si} \quad -1 < x < 1; \\ -2\arctan x + c_3 & \text{si} \quad x > 1; \end{cases}$$

Or u est continue sur $\mathbb{R}$ (et à valeurs dans $[-1; 1]$) et arcsin est continue sur $[-1; 1]$. Donc par composée, f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc :

$$f(x) = \begin{cases} -2\arctan x + c_1 & \text{si} \quad x \leqslant -1; \\ 2\arctan x + c_2 & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ -2\arctan x + c_3 & \text{si} \quad x \geqslant 1; \end{cases}$$

On a $c_2 = f(0) = \arcsin 0 = 0$. Puis $f(-1) = \arcsin(-1) = -2\arctan(-1) + c_1$ donc $c_1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$. Enfin $f(1) = \arcsin(1) = -2\arctan 1 + c_3$ donc $c_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.
Conclusion :

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - 2\arctan x & \text{si} \quad x \leqslant -1; \\ 2\arctan x & \text{si} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1; \\ \pi - 2\arctan x & \text{si} \quad x \geqslant 1; \end{cases}$$

Exercice E.

a) Si $\arccos x = \arcsin(2x)$ alors $\cos(\arccos x) = \cos(\arcsin(2x))$. Donc $x = \sqrt{1-4x^2}$ (en particulier $x \geqslant 0$), ce qui implique que $x^2 = 1 - 4x^2$. D'où $x^2 = \frac{1}{5}$. Finalement si $\arccos x = \arcsin(2x)$, alors $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ou $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Or $-\frac{1}{\sqrt{5}} < 0$ ne peut pas être solution de l'équation. En revanche si $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a $0 < x < \frac{1}{2}$, donc $\arccos x$ et $\arcsin(2x)$ sont dans $[0; \pi]$. Comme ils ont même cosinus, forcément ils sont égaux et $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ est solution de l'équation initiale. D'où

$$S = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}.$$

b) En prenant la tangente dans l'égalité $\arctan(2x) + \arctan(3x) = -\frac{\pi}{4}$, on obtient $\frac{2x+3x}{1-6x^2} = -1$, ce qui donne $6x^2 - 5x - 1 = 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 49$ et pour racines 1 et $-\frac{1}{6}$.
Or 1 ne peut pas être solution puisque $\arctan 2 + \arctan 3 > 0$. En revanche on montre facilement que $\arctan(-\frac{2}{6}) + \arctan(-\frac{3}{6}) = \arctan(-\frac{1}{3}) + \arctan(-\frac{1}{2}) \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$. Donc comme il a même tangente que $-\frac{\pi}{4}$, il est bien égal à $-\frac{\pi}{4}$. D'où

$$S = \left\{-\frac{1}{6}\right\}.$$

c) Posons $a = \arcsin\frac{4}{5}$ et $b = \arcsin\frac{5}{13}$.
$\frac{4}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $a < \frac{\pi}{3}$.
$\frac{5}{13} < \frac{1}{2}$ donc $b < \frac{\pi}{6}$.
D'où $0 < a + b < \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$ c'est-à-dire $0 < a + b < \frac{\pi}{2}$.
Par conséquent

$$\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} = \arcsin x \iff x = \sin(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}).$$

Or $\sin(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}) = \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a = \frac{4}{5}\times\sqrt{1-(\frac{5}{13})^2} + \frac{5}{13}\times\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\times\frac{3}{5} = \frac{63}{65}$.
D'où

$$S = \left\{\frac{63}{65}\right\}.$$

Exercice F. Montrer que, pour tout $x \in [-1;1[$,

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos x.$$

Solution.

Pour tout $x \in]-1;1[$, il existe un unique $a \in]0;\frac{\pi}{2}[$ tel que $x = \cos(2a)$. Alors

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\cos(2a)}{1-\cos(2a)} = \frac{2\cos^2 a}{2\sin^2 a} = \frac{1}{\tan^2 a}.$$

Comme $a \in]0;\frac{\pi}{2}[$, $\tan a > 0$. Donc

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{\tan a}.$$

D'où, puisque $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$, on obtient :

$$\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\tan a}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\tan a) = \frac{\pi}{2} - a.$$

Or $x = \cos(2a)$ et $a \in]0;\frac{\pi}{2}[$, donc $a = \frac{1}{2}\arccos x$. D'où le résultat pour tout $x \in]-1;1[$.

Pour $x = -1$, on vérifie directement que la formule proposée est vérifiée. D'une part on a $\arctan 0 = 0$. De l'autre on a $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\pi = 0$. C'est bon !