I.U.T. de Brest
Département GMP

**Mathématiques**

Compléments sur les études de fonctions

# Trigonométrie réciproque : arccosinus, arcsinus, arctangente

Ce document présente l'essentiel de ce qu'il y a à savoir sur les fonctions arccosinus, arcsinus et arctangente. Il est préférable de commencer par visionner les vidéos de cours, et de considérer ce pdf comme un rappel des infos à retenir.

# Généralités sur les fonctions réciproques

Si $f$ est une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, alors, pour tout $y$ de l'intervalle $J = f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution $x$ dans $I$. Ainsi, on peut définir une fonction de $J$ dans $I$ qui, à chaque $y$ de $J$, associe l'unique $x$ de $I$ vérifiant $f(x) = y$. Cette fonction est appelée **fonction réciproque** de $f$ et est notée $f^{-1}$. Autrement dit :

$$\begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x \in I \end{cases}$$

*Exemples.*

► La fonction $f : x \mapsto 3x - 1$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admet pour fonction réciproque la fonction $f^{-1} : y \mapsto \frac{1}{3}(y + 1)$.

► La fonction carrée $x \mapsto x^2$, définie de $[0; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$, admet pour fonction réciproque la fonction racine carrée.

► La fonction exp, définie de $\mathbb{R}$ dans $]0; +\infty[$, admet pour fonction réciproque la fonction ln.

*Remarque 1.* Si $f$ est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, alors sa fonction réciproque est continue sur $f(I)$ et a le même sens de variation que $f$.

*Remarque 2.* Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives de $f$ et $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Si $f$ est une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, et si on note $J = f(I)$, alors :

$$\text{pour tout } x \in I, \qquad f^{-1}(f(x)) = x$$

et

$$\text{pour tout } x \in J, \qquad f(f^{-1}(x)) = x$$

**Dérivée d'une fonction réciproque.** Considérons $f$ une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, et notons $J = f(I)$. Si $f$ admet une dérivée non nulle sur $I$, alors $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et on a :

$$\text{pour tout } x \in J, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

# La fonction arccosinus

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante de $[0;\pi]$ vers $[-1;1]$. Elle admet donc une fonction réciproque, qu'on appelle *arccosinus* et qu'on note arccos. Ainsi la fonction arccos est continue et strictement décroissante de $[-1;1]$ vers $[0;\pi]$. De plus,

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0;\pi] \end{cases}$$

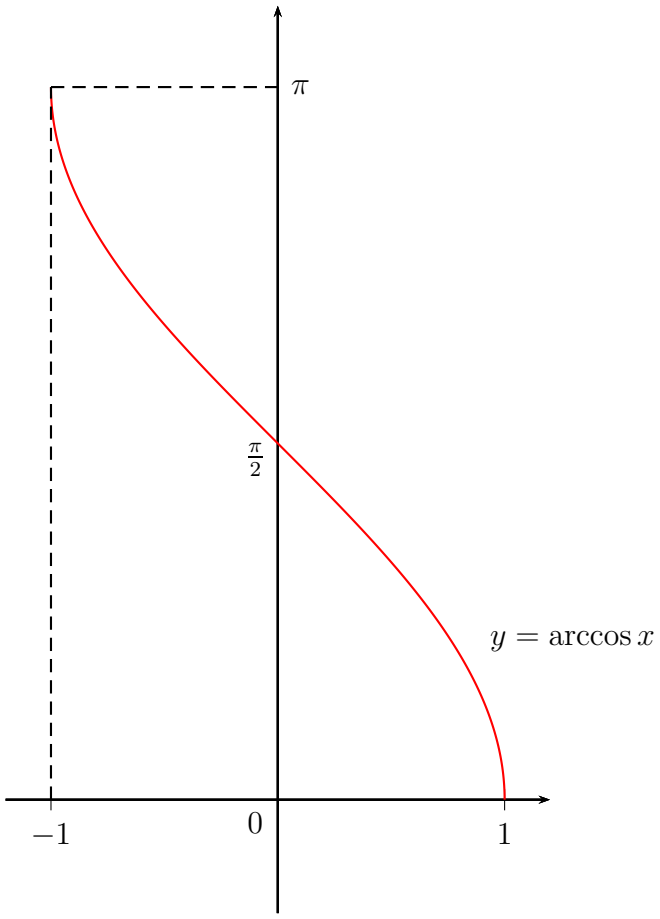
*Exemples.* $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$; $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$; $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$; $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$; $\arccos(1) = 0$.

- Pour tout $x \in [-1;1]$, $\cos(\arccos x) = x$ et $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.
- Pour tout $x \in [0;\pi]$, $\arccos(\cos x) = x$.
- La fonction arccos est dérivable sur $]-1;1[$, et pour tout $x \in ]-1;1[$, on a :

$$(\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- Pour tout $x \in [-1;1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

*Représentation graphique.* La courbe représentative de arccos est obtenue à partir de celle de cos sur $[0;\pi]$ en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.



# La fonction arcsinus

La fonction sinus est continue et strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ vers $[-1;1]$. Elle admet donc une fonction réciproque, qu'on appelle *arcsinus* et qu'on note arcsin. Ainsi la fonction arcsin est continue et strictement croissante de $[-1;1]$ vers $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. De plus,

$$\begin{cases} y = \arcsin x \\ x \in [-1;1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sin y \\ y \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

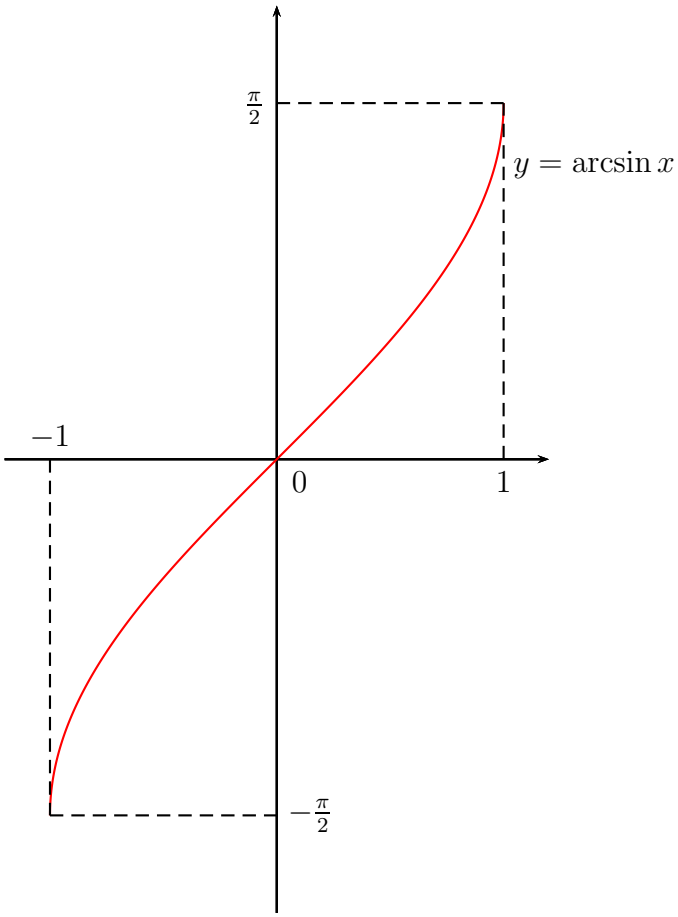
*Exemples.* $\arcsin(0) = 0$; $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$; $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$; $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}$; $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$.

- Pour tout $x \in [-1;1]$, $\sin(\arcsin x) = x$ et $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.
- Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = x$.
- La fonction arcsin est dérivable sur $]-1;1[$, et pour tout $x \in ]-1;1[$, on a :

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

- Pour tout $x \in [-1;1]$, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ (la fonction arcsin est impaire).
- Pour tout $x \in [-1;1]$, $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

*Représentation graphique.* La courbe représentative de arcsin est obtenue à partir de celle de sin sur $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.



# La fonction arctangente

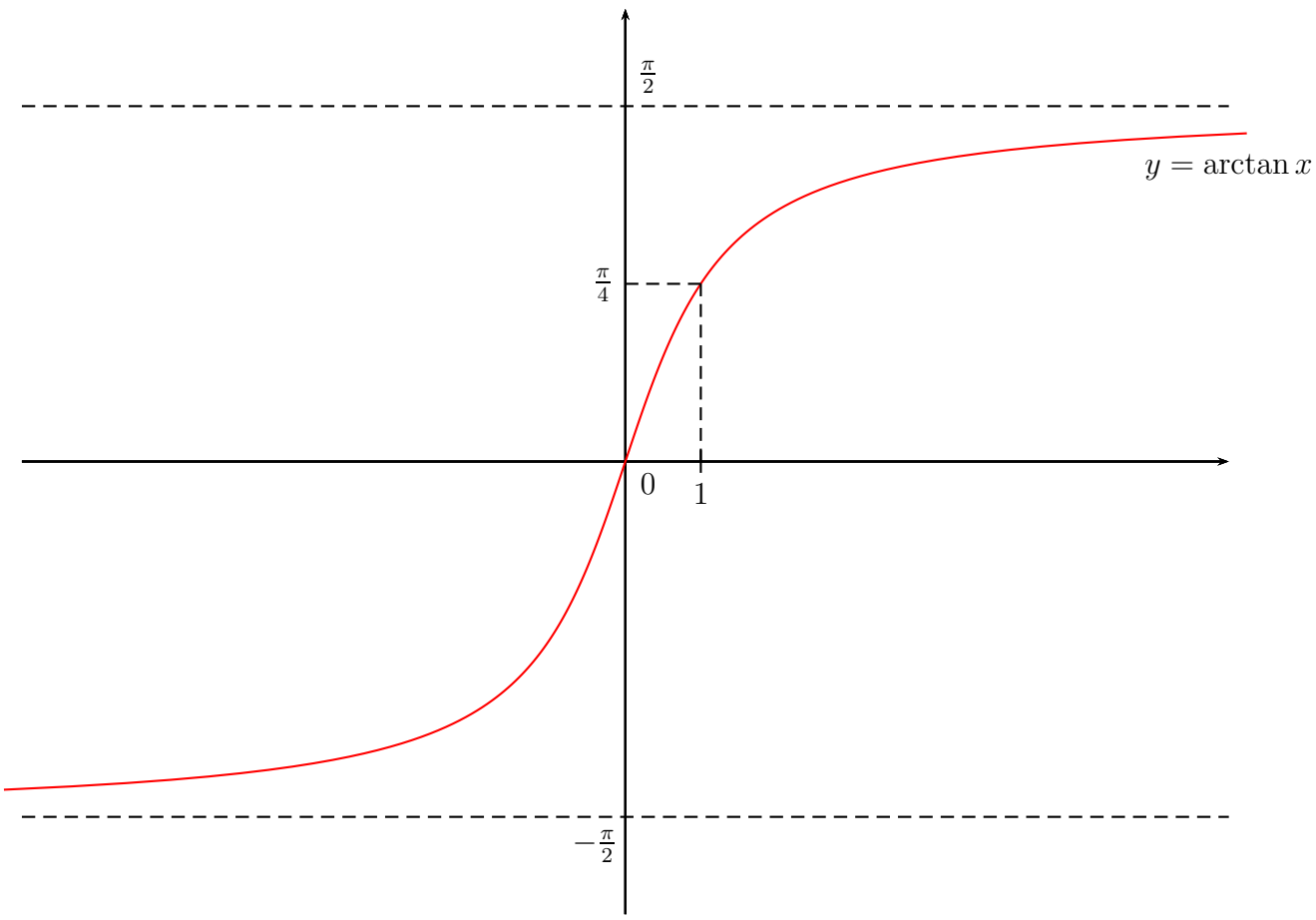
La fonction tangente est continue et strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, qu'on appelle *arctangente* et qu'on note arctan. Ainsi la fonction arctan est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. De plus,

$$\begin{cases} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y \\ y \in \, ]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[ \end{cases}$$

*Exemples.* $\arctan(0) = 0$ ; $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ ; $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ ; $\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ .

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan x) = x$.
- Pour tout $x \in ]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, $\arctan(\tan x) = x$.
- La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan x$ (la fonction arctan est impaire).
- $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$

*Représentation graphique.* La courbe représentative de arctan est obtenue à partir de celle de tan sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.