Exercice 1.

- $J_0 = \displaystyle\int_0^{\ln 5} \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$ (poser $t = \mathrm{e}^x$).

On effectue le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$. Alors $x = \ln t$.
Par conséquent, en dérivant, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}$, et donc $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
D'autre part, lorsque $x = 0$, alors $t = \mathrm{e}^0 = 1$ et, lorsque $x = \ln 5$, alors $t = \mathrm{e}^{\ln 5} = 5$.
Puisque $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} = \frac{1}{t}$, la formule de changement de variable nous donne :

$$J_0 = \int_0^{\ln 5} \frac{1}{3+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^5 \frac{1}{3+\frac{1}{t}} \times \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^5 \frac{1}{3t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} \times \int_1^5 \frac{3}{3t+1}\,\mathrm{d}t.$$

La dernière intégrale se calcule aisément puisque la fonction à intégrer est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(t) = 3t+1$, et donc $u'(t) = 3$. Ainsi

$$J_0 = \frac{1}{3} \times [\ln|3t+1|]_1^5 = \frac{1}{3}(\ln(16) - \ln 4) = \frac{2\ln 2}{3}.$$

- $J_1 = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x$ (poser $t = \sqrt{3x+1}$).

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{3x+1}$. Donc $t^2 = 3x+1$, puis $3x = t^2 - 1$ et enfin $x = \frac{t^2-1}{3} = \frac{1}{3} \times (t^2-1)$.
Par conséquent, en dérivant, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3} \times 2t$, et donc $\mathrm{d}x = \frac{2t}{3}\,\mathrm{d}t$.
D'autre part, lorsque $x = 0$, alors $t = \sqrt{0+1} = 1$ et, lorsque $x = 1$, alors $t = \sqrt{3+1} = 2$.
Ainsi

$$J_1 = \int_1^2 \frac{1}{3} \times (t^2-1) \times t \times \frac{2t}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9} \times \int_1^2 (t^4 - t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{9} \times \left[\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right]_1^2$$

D'où

$$J_1 = \frac{2}{9} \times \left(\frac{2^5}{5} - \frac{2^3}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9} \times \left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3}\right) = \frac{2}{9} \times \frac{58}{15} = \frac{116}{135}.$$

- $J_2 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (poser $t = \sqrt{x}$)

Comme $t = \sqrt{x}$, on a $x = t^2$. Donc $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. D'où :

$$J_2 = \int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^t \times 2t\,\mathrm{d}t.$$

Par IPP (identique à la seconde IPP dans le calcul de J à l'exercice 3), on obtient :

$$J_2 = 2 \times \int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 2 \times \left([t\,\mathrm{e}^t]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t\right) = 2 \times \left(\mathrm{e} - [\mathrm{e}^t]_0^1\right) = 2(\mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1)) = 2.$$

- $J_3 = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{3+\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$ (poser $t = \cos x$).

Première méthode (classique). Comme $t = \cos x$, on en déduit que $x = \arccos t$ car $x \in [0;\pi]$.

Bornes. Si $x = 0$ alors $t = 1$; et si $x = \pi$ alors $t = -1$.

Fonction. $\sin x = \sin(\arccos t) = \sqrt{1-t^2}$ en utilisant le cours du semestre 1.

Ensuite $3+\cos(2x) = 3+(2\cos^2 x - 1) = 2+2\cos^2 x = 2+2t^2$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{\sin x}{3+\cos(2x)} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+2t^2}$$

Différentielle. On a $x = \arccos t$. Donc $\mathrm{d}x = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. D'où :

$$J_3 = \int_1^{-1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{2+2t^2} \times \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = (-1)\times\int_1^{-1}\frac{1}{2+2t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2+2t^2}\,\mathrm{d}t$$

Finalement

$$J_3 = \frac{1}{2}\times\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\times[\arctan t]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Seconde méthode (plus efficace que la première, mais inhabituelle par rapport à la méthode standard du cours).

Si $t = \cos x$, alors, en dérivant par rapport à x, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -\sin x$. Donc $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$, puis $\sin x\,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$.

De plus $3+\cos(2x) = 3+(2\cos^2 x-1) = 2+2\cos^2 x = 2+2t^2$.

D'où, en faisant attention au placement des nouvelles bornes,

$$J_3 = \int_0^{\pi}\frac{1}{3+\cos(2x)}\times\sin x\,\mathrm{d}x = \int_1^{-1}\frac{-1}{2+2t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\times\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\times[\arctan t]_{-1}^{1}.$$

Finalement

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{3+\cos(2x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

- $J_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ (poser $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$)

Comme $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a

$$\arctan(t) = \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right).$$

Or $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, donc $\dfrac{x}{2}\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, ce qui permet d'affirmer que

$$\arctan(t) = \arctan\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2}.$$

Ainsi $x = 2\arctan t$.

Alors $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. D'où, en utilisant la dernière ligne du formulaire de trigo, on a :

$$J_4 = \int_0^1\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\times\frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \int_0^1\frac{1}{1+t^2+2t}\times 2\,\mathrm{d}t = 2\times\int_0^1\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 2\times\left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = 1.$$

- $J_5 = \displaystyle\int_{-4}^{-2}\frac{3x+1}{x^2+4x+8}\,\mathrm{d}x$ (poser $t = \dfrac{1}{2}x+1$).

Bornes : si $x=-4$ alors $t = \frac{1}{2}\times(-4)+1 = -1$. De même si $x=-2$ alors $t=\frac{1}{2}\times(-2)+1 = 0$.

Fonction : comme $t = \dfrac{1}{2}x+1$, on a $\dfrac{1}{2}x = t-1$, et donc $x = 2(t-1) = 2t-2$. Alors

$$3x+1 = 3(2t-2)+1 = 6t-5$$

et

$$x^2+4x+8 = (2t-2)^2+4(2t-2)+8 = (4t^2-8t+4)+8t-8+8 = 4t^2+4 = 4(1+t^2).$$

Par conséquent,
$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+4x+8} = \frac{6t-5}{4(1+t^2)}.$$

Différentielle : on a $x = 2t-2$. En dérivant on obtient $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2$.
On en déduit que $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$.

Conclusion. On applique la formule de changement de variable :
$$J_5 = \int_{-1}^{0} \frac{6t-5}{4(1+t^2)} \times 2\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} \frac{6t-5}{2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times \int_{-1}^{0} \frac{6t-5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Alors
$$J_5 = \frac{1}{2} \times \int_{-1}^{0} \left(\frac{6t}{1+t^2} - \frac{5}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times \left(\int_{-1}^{0} \frac{6t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{0} \frac{5}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$
$$J_5 = \frac{1}{2} \times \left(3 \times \int_{-1}^{0} \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - 5 \times \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

Or $\frac{2t}{1+t^2}$ correspond à $\frac{u'}{u}$ avec $u(t) = 1+t^2$ (et donc $u'(t) = 2t$). De plus $\frac{1}{1+t^2}$ correspond à $\frac{v'}{1+v^2}$ avec $v(t) = t$ (et donc $v'(t) = 1$). D'où :
$$J_5 = \frac{1}{2} \times \left(3 \times [\ln(1+t^2)]_{-1}^{0} - 5 \times [\arctan t]_{-1}^{0}\right)$$

Finalement
$$J_5 = \frac{1}{2} \times (3 \times (\ln 1 - \ln 2) - 5 \times (\arctan 0 - \arctan(-1)))$$

Or $\ln 1 = 0$, $\arctan 0 = 0$ et $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$. D'où
$$J_5 = \frac{1}{2} \times \left(-3\ln 2 - \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{3\ln 2}{2} - \frac{5\pi}{8}.$$

Exercice 2.

On considère f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{8\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}$.

Calcul de $\displaystyle\int \frac{8\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ pour déterminer toutes les primitives de f.

Changement de variable $t = 3+2\sqrt{x}$, donc on obtient successivement :
$$2\sqrt{x} = t-3, \text{ puis } \sqrt{x} = \frac{t-3}{2}, \text{ et enfin } x = \left(\frac{t-3}{2}\right)^2.$$

Alors, comme $(u^2)' = 2u'u$, on en déduit que $\mathrm{d}x = 2 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{t-3}{2}\,\mathrm{d}t = \dfrac{t-3}{2}\,\mathrm{d}t$. D'où :
$$\int \frac{8\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{8 \times \frac{t-3}{2}}{t} \times \frac{t-3}{2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2 \times (t-3)^2}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Finalement en développant le carré puis en simplifiant, on obtient :
$$\int \frac{8\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2 \times (t^2-6t+9)}{t}\,\mathrm{d}t = \int \left(2t - 12 + \frac{18}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

ce qui donne :

$$\int \frac{8\sqrt{x}}{3+2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = t^2 - 12t + 18\ln|t| + c,$$

avec c une constante réelle quelconque.

Conclusion. En revenant à la variable initiale x, on peut affirmer que toutes les primitives F de f sur $]0;+\infty[$ s'écrivent sous la forme :

$$F(x) = \left(3+2\sqrt{x}\right)^2 - 12\left(3+2\sqrt{x}\right) + 18\ln\left(3+2\sqrt{x}\right) + c,$$

avec c une constante réelle quelconque. Cela peut aussi s'écrire :

$$F(x) = 9 + 12\sqrt{x} + 4x - 36 - 24\sqrt{x} + 18\ln\left(3+2\sqrt{x}\right) + c = 4x - 12\sqrt{x} - 27 + 18\ln\left(3+2\sqrt{x}\right) + c.$$

Exercice 3.

- J_6 ? $t = \sqrt{x+1}$ ssi $x = t^2 - 1$. De plus, $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$. D'où :

$$J_6 = \int_3^8 \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{2t(t^2-1)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Avec l'identité remarquable $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, on obtient :

$$J_6 = \int_2^3 2t(t-1)\,\mathrm{d}t = \int_2^3 (2t^2 - 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^3}{3} - t^2\right]_2^3 = 18 - 9 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{23}{3}.$$

Remarque (autre méthode). On a :

$$\frac{x}{1+\sqrt{x+1}} = \frac{x(1-\sqrt{x+1})}{(1+\sqrt{x+1})(1-\sqrt{x+1})} = \frac{x(1-\sqrt{x+1})}{-x} = \sqrt{x+1} - 1.$$

D'où

$$J_6 = \int_3^8 (\sqrt{x+1} - 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3} - x\right]_3^8 = 18 - 8 - \frac{16}{3} + 3 = \frac{23}{3}.$$

- J_7 ?

$t = \tan x$ donc $\mathrm{d}t = (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x = (1+t^2)\,\mathrm{d}x$, puis $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Par ailleurs $t = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, donc $\sin x = t\cos x$. Par conséquent $1 + \sin(2x) = 1 + 2\sin x\cos x = 1 + 2t\cos^2 x$. Mais $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + t^2$. On obtient alors $1 + \sin(2x) = 1 + \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Ainsi

$$J_7 = \int_0^1 \frac{t}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \times \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2+2t}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\dfrac{t}{1+t^2+2t} = \dfrac{t}{(1+t)^2} = \dfrac{(t+1)-1}{(1+t)^2} = \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$. On en déduit

$$J_7 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)\mathrm{d}t = \left[\ln|1+t| + \frac{1}{1+t}\right]_0^1 = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1.$$

Conclusion.

$$J_7 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

- J_8 ? $t = \frac{1}{x}$ ssi $x = \frac{1}{t}$. De plus, $\mathrm{d}x = \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$. D'où :

$$J_8 = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(\frac{1}{t})}{1+(\frac{1}{t})^2} \times \frac{-1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{2}^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln t}{t^2+1} \times (-1)\,\mathrm{d}t = \int_{2}^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = -J_8.$$

Ainsi $2J_8 = 0$ c'est-à-dire $J_8 = 0$.

- J_9 ? $t = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ ssi $x = \ln(1+t^2)$. De plus, $\mathrm{d}x = \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. D'où :

$$J_9 = \int_0^{\ln 2} \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 t \times \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2 \times \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2 \times \int_0^1 \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$J_9 = 2 \times \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = 2\,[t - \arctan t]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$