Exercice 1 ($\simeq 5$ points). Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = 4x^2 - 3\,\mathrm{e}^{2x}$.

• L'équa diff (E) est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$, avec $a(x) = -2$ dont une primitive est donnée par $A(x) = -2x$.

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{2x}$ avec λ une constante réelle.

• Solution particulière y_P de (E) ?

Ici $a(x) = -2 = a$ est une constante, ce qui permet d'utiliser le tableau donné dans l'énoncé. Cependant on doit d'abord utiliser le principe de superposition : on va chercher une solution particulière y_{P1} de l'équation (E_1) $y' - 2y = 4x^2$, puis une solution particulière y_{P2} de l'équation (E_2) $y' - 2y = -3\,\mathrm{e}^{2x}$.

▶ Détermination de y_{P1} :

Comme $f_1(x) = 4x^2 = P(x)\,\mathrm{e}^{kx}$ avec $k = 0$ et $P(x) = 4x^2$ qui est un polynôme de degré 2, le tableau donné dans l'énoncé nous permet de voir qu'on doit chercher y_{P1} sous la forme d'un polynôme de degré 2. Autrement dit on va écrire $y_{P1} = bx^2 + cx + d$ avec b, c, d des constantes réelles à déterminer. Il reste à traduire le fait que $y_{P1} = bx^2 + cx + d$ doit vérifier l'équation différentielle (E_1) $y' - 2y = 4x^2$.

Ainsi $y'_{P1} - 2y_{P1} = 4x^2$ si et seulement si $(bx^2 + cx + d)' - 2(bx^2 + cx + d) = 4x^2$,
ssi $2bx + c - 2bx^2 - 2cx - 2d = 4x^2$,
ssi $-2bx^2 + (2b - 2c)x + (c - 2d) = 4x^2 + 0x + 0$,
ssi $-2b = 4$ et $2b - 2c = 0$ et $c - 2d = 0$ (par identification de polynômes),
ssi $b = -\frac{4}{2} = -2$ et $c = b = -2$ et $d = \frac{c}{2} = -1$.

D'où $y_{P1} = -2x^2 - 2x - 1$.

▶ Détermination de y_{P2} :

Comme $f_2(x) = -3\,\mathrm{e}^{2x} = P(x)\,\mathrm{e}^{kx}$ avec $k = 2 = -a$ et $P(x) = -3$ qui est un polynôme de degré 0, le tableau donné dans l'énoncé nous permet de voir qu'on doit chercher y_{P2} sous la forme $y_{P2} = Q(x)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec Q un polynôme de degré $0 + 1 = 1$. Autrement dit on va écrire $y_{P2} = (\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{2x}$ avec α, β des constantes réelles à déterminer. Il reste à traduire le fait que $y_{P2} = (\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{2x}$ doit vérifier l'équation différentielle (E_2) $y' - 2y = -3\,\mathrm{e}^{2x}$.

En utilisant la formule de dérivation d'un produit, on commence par calculer :

$$y'_{P2} = \alpha\,\mathrm{e}^{2x} + (\alpha x + \beta) \times 2\,\mathrm{e}^{2x}.$$

On veut que $y'_{P2} - 2y_{P2} = -3\,\mathrm{e}^{2x}$ pour tout réel x, c'est-à-dire

$$\alpha\,\mathrm{e}^{2x} + (\alpha x + \beta) \times 2\,\mathrm{e}^{2x} - 2(\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{2x} = -3\,\mathrm{e}^{2x}.$$

Cela donne $\alpha\,\mathrm{e}^{2x} = -3\,\mathrm{e}^{2x}$. D'où $\alpha = -3$.

Il n'y a donc aucune contrainte sur β. Étant donné que β peut être une constante quelconque et qu'on cherche UNE solution particulière y_{P2}, on choisit $\beta = 0$.

Attention à la rédaction ! Il ne faut surtout pas écrire : « Cela donne $\alpha\,\mathrm{e}^{2x} = -3\,\mathrm{e}^{2x}$. D'où $\alpha = -3$ et $\beta = 0$. » Cela suggérerait qu'on n'a pas le choix sur α et sur β... alors qu'on n'a pas le choix sur α (α est obligatoirement égal à -3) mais on a le choix sur β : on pourrait prendre $\beta = 20459$ et ce serait correct.

Finalement $y_{P2} = (\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{2x} = -3x\,\mathrm{e}^{2x}$.

► On déduit de ce qui précède que $y_P = y_{P1} + y_{P2} = -2x^2 - 2x - 1 - 3x\,\mathrm{e}^{2x}$ est une solution particulière de l'équation (E).

• Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda\,\mathrm{e}^{2x} - 2x^2 - 2x - 1 - 3x\,\mathrm{e}^{2x}$$

avec λ une constante réelle.

Exercice 2 ($\simeq 4,5$ points). Résolution sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ xy' - y = x\Big(3\sqrt{x} - 2\Big)^2.$$

Après avoir divisé par x (possible car $x \neq 0$ sur $]0;+\infty[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' - \frac{1}{x} \times y = \Big(3\sqrt{x} - 2\Big)^2.$$

• Cette dernière équa diff est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$, avec $a(x) = -\dfrac{1}{x}$.
Or $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ est de la forme $(-1) \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = x$, et donc $u'(x) = 1$.
Une primitive A sur $]0;+\infty[$ de la fonction a est donc définie par

$$A(x) = (-1) \times \ln|u(x)| = -\ln|x| = -\ln(x)$$

puisque x est toujours > 0 pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Par conséquent $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{+\ln(x)} = \lambda x$ avec λ une constante réelle quelconque.

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda \times x$ avec λ une constante réelle.

• Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times x$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times x + \lambda(x) \times 1 = \lambda'(x) \times x + \lambda(x).$$

Attention ! Ras-le-bol de voir, dans les copies, certains étudiants qui font les fainéants et qui écrivent λ au lieu de $\lambda(x)$ quand ils font la variation de la constante : ici tout l'intérêt de la méthode est de faire varier la constante λ et de la voir comme une fonction ; d'où l'écriture $\lambda(x)$.
De même, il ne faut pas écrire $\lambda(x)'$ mais bien $\lambda'(x)$. D'habitude, on écrit bien $f'(x)$ et pas $f(x)'$.

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$xy_P' - y_P = x\Big(3\sqrt{x} - 2\Big)^2,$$

c'est-à-dire

$$x \times \Big(\lambda'(x) \times x + \lambda(x)\Big) - \lambda(x) \times x = x\Big(3\sqrt{x} - 2\Big)^2,$$

c'est-à-dire encore

$$x^2 \times \lambda'(x) + x \times \lambda(x) - \lambda(x) \times x = x\Big(3\sqrt{x} - 2\Big)^2,$$

ce qui donne finalement

$$x^2 \times \lambda'(x) = x\Big(3\sqrt{x} - 2\Big)^2,$$

D'où

$$\lambda'(x) = \frac{x\left(3\sqrt{x}-2\right)^2}{x^2} = \frac{\left(3\sqrt{x}-2\right)^2}{x}.$$

En utilisant l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, on obtient :

$$\left(3\sqrt{x}-2\right)^2 = 9x - 12\sqrt{x} + 4,$$

ce qui donne :

$$\lambda'(x) = \frac{\left(3\sqrt{x}-2\right)^2}{x} = \frac{9x-12\sqrt{x}+4}{x} = 9 - 12\times\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{4}{x} = 9 - 12\times\frac{1}{\sqrt{x}} + 4\times\frac{1}{x}.$$

Ainsi $\lambda(x) = 9x - 12\times 2\sqrt{x} + 4\ln x$.

D'où $y_P = \lambda(x)\times x = (9x - 12\times 2\sqrt{x} + 4\ln x)\times x = 9x^2 - 24x\sqrt{x} + 4x\ln x$.

- Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda\times x + 9x^2 - 24x\sqrt{x} + 4x\ln x.$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 3 ($\simeq 5$ points).

Résolution sur $]-1;1[$ de l'équation différentielle (E) : $(1-x^2)y' - 2xy = (2x-1)\ln(1-x)$.

Après avoir divisé par $1-x^2$ (possible car $1-x^2 \neq 0$ pour tout $x \in]-1;1[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' - \frac{2x}{1-x^2}\times y = \frac{(2x-1)\ln(1-x)}{1-x^2}.$$

- Cette dernière équa diff est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$, avec $a(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$ qui est de la forme $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = 1-x^2$ (on a bien $u'(x) = -2x$). Une primitive A sur $]-1;1[$ de la fonction a est donc définie par $A(x) = \ln|u(x)| = \ln|1-x^2| = \ln(1-x^2)$ puisque $1-x^2 > 0$ pour tout réel $x \in]-1;1[$.

Par conséquent $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{-\ln(1-x^2)} = \lambda\times\dfrac{1}{1-x^2}$ avec λ une constante réelle quelconque.

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\times\dfrac{1}{1-x^2}$ avec λ une constante réelle.

- Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x)\times\dfrac{1}{1-x^2}$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit et en utilisant le fait que $\left(\dfrac{1}{w}\right)' = -\dfrac{w'}{w^2}$, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x)\times\frac{1}{1-x^2} + \lambda(x)\times\left(-\frac{-2x}{(1-x^2)^2}\right) = \lambda'(x)\times\frac{1}{1-x^2} + \lambda(x)\times\frac{2x}{(1-x^2)^2}.$$

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$(1-x^2)y_P' - 2xy_P = (2x-1)\ln(1-x),$$

c'est-à-dire

$$(1-x^2)\left(\lambda'(x)\times\frac{1}{1-x^2}+\lambda(x)\times\frac{2x}{(1-x^2)^2}\right)-2x\times\left(\lambda(x)\times\frac{1}{1-x^2}\right)=(2x-1)\ln(1-x).$$

Autrement dit,

$$\lambda'(x)+\lambda(x)\times\frac{2x}{1-x^2}-2x\times\lambda(x)\times\frac{1}{1-x^2}=(2x-1)\ln(1-x),$$

ce qui donne $\lambda'(x)=(2x-1)\ln(1-x)$.

Pour trouver une primitive de $(2x-1)\ln(1-x)$, on va effectuer une IPP sans bornes. Rappelons d'abord la formule d'IPP (avec bornes) :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=\Big[\,u(x)\,v(x)\,\Big]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ici on pose $u(x)=\ln(1-x)$ et $v'(x)=2x-1$.

Tout d'abord, on a $u'(x)=\dfrac{-1}{1-x}$ car la dérivée de $\ln(w)$ est égale à $\dfrac{w'}{w}$ avec ici $w(x)=1-x$ et donc $w'(x)=-1$.

Ensuite, comme $v'(x)=2x-1$, on peut prendre $v(x)=x^2-x$.

La formule d'IPP nous donne donc :

$$\int(2x-1)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=\Big[(x^2-x)\ln(1-x)\Big]-\int(x^2-x)\times\frac{-1}{1-x}\,\mathrm{d}x=(x^2-x)\ln(1-x)-\int x(x-1)\times\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi

$$\int(2x-1)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x=(x^2-x)\ln(1-x)-\int x\,\mathrm{d}x=(x^2-x)\ln(1-x)-\frac{x^2}{2}+k,$$

avec k une constante.

On peut donc prendre $\lambda(x)=(x^2-x)\ln(1-x)-\dfrac{x^2}{2}$.

D'où $y_P=\lambda(x)\times\dfrac{1}{1-x^2}=\left((x^2-x)\ln(1-x)-\dfrac{x^2}{2}\right)\times\dfrac{1}{1-x^2}$.

- Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y=y_H+y_P=\lambda\times\frac{1}{1-x^2}+\left((x^2-x)\ln(1-x)-\frac{x^2}{2}\right)\times\frac{1}{1-x^2}=\left(\lambda+(x^2-x)\ln(1-x)-\frac{x^2}{2}\right)\times\frac{1}{1-x^2}$$

avec λ une constante réelle quelconque.

- Remarque finale : évidemment la fin de cet exercice (trouver $\lambda(x)$ à partir de $\lambda'(x)$) était la question difficile du devoir.

Exercice 4 ($\simeq 6$ points). Résolution de l'équation différentielle (E) : $y''-y'-2y = 11\cos(2x)-7\sin(2x)$.

1. Équation homogène (H) : $y''-y'-2y=0$.
   L'équation caractéristique associée à (H) est $r^2-r-2=0$. Son discriminant est égal à $\Delta = 1+8 = 9$.
   Les solutions de l'équation caractéristique $r^2-r-2=0$ sont donc :
   $$r_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1-3}{2} = -1.$$
   Donc $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{2x} + \mu\,\mathrm{e}^{-x}$, où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

2. Solution particulière y_P de (E) sous la forme $y_P = \alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x)$ avec α et β des constantes.

   Alors, en utilisant le fait que $(\cos u)' = -u'\sin u$ et que $(\sin u)' = u'\cos u$, on obtient en prenant $u(x) = 2x$ et donc $u'(x) = 2$:
   $$y_P' = -2\alpha\sin(2x) + 2\beta\cos(2x).$$
   Puis, en dérivant y_P' à nouveau, on obtient
   $$y_P'' = -2\alpha\times 2\cos(2x) + 2\beta\times(-2\sin(2x)) = -4\alpha\cos(2x) - 4\beta\sin(2x).$$
   Par conséquent, y_P vérifie (E)
   si et seulement si $y_P''-y_P'-2y_P = 11\cos(2x)-7\sin(2x)$ pour tout réel x,
   $$\text{ssi } \Big(-4\alpha\cos(2x)-4\beta\sin(2x)\Big) - \Big(-2\alpha\sin(2x)+2\beta\cos(2x)\Big) - 2\Big(\alpha\cos(2x)+\beta\sin(2x)\Big) = 11\cos(2x)-7\sin(2x)$$
   $$\text{ssi } (-4\alpha-2\beta-2\alpha)\cos(2x) + (-4\beta+2\alpha-2\beta)\sin(2x) = 11\cos(2x)-7\sin(2x),$$
   $$\text{ssi } (-6\alpha-2\beta)\cos(2x) + (2\alpha-6\beta)\sin(2x) = 11\cos(2x) - 7\sin(2x) \text{ pour tout réel } x,$$
   $$\text{ssi } \begin{cases} -6\alpha-2\beta &= 11 \quad \leftarrow \text{ termes en } \cos(2x) \\ 2\alpha-6\beta &= -7 \quad \leftarrow \text{ termes en } \sin(2x) \end{cases}$$
   $$\text{ssi } \begin{cases} -6\alpha-2\beta &= 11 \quad \text{équation } (E_1) \\ 2\alpha-6\beta &= -7 \quad \text{équation } (E_2) \end{cases}$$
   $$\text{ssi } \begin{cases} -20\beta &= -10 \quad \text{équation } (E_1) := (E_1) + 3\times(E_2) \\ 2\alpha-6\beta &= -7 \quad \text{équation } (E_2) \end{cases}$$
   $$\text{ssi } \begin{cases} \beta &= \dfrac{-10}{-20} = \dfrac{1}{2} \\ 2\alpha - 6\times\dfrac{1}{2} &= -7 \end{cases}$$
   $$\text{ssi } \begin{cases} \beta &= \dfrac{1}{2} \\ \alpha &= \dfrac{-7+3}{2} = -2 \end{cases}$$
   D'où $y_P = -2\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x)$.

3. Déterminons l'unique solution de l'équation $y'' - y' - 2y = 11\cos(2x) - 7\sin(2x)$ vérifiant $y(0) = -5$ et $y'(0) = -14$.
On déduit des questions précédentes que les solutions de (E) sont données par

$$y = y_H + y_P = \lambda\,\mathrm{e}^{2x} + \mu\,\mathrm{e}^{-x} - 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$$

où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

Alors $y(0) = -5$ ssi $\lambda + \mu - 2 + 0 = -5$, ssi $\lambda + \mu = -3$, ssi $\mu = -3 - \lambda$.

D'autre part, en dérivant y, on obtient :

$$y' = 2\lambda\,\mathrm{e}^{2x} - \mu\,\mathrm{e}^{-x} + 4\sin(2x) + \cos(2x).$$

Par conséquent $y'(0) = -14$ ssi $2\lambda - \mu + 0 + 1 = -14$, ssi $2\lambda - \mu = -15$.

On remplace μ par $-3 - \lambda$ dans cette dernière équation : $2\lambda - (-3 - \lambda) = -15$, c'est-à-dire $3\lambda = -15 - 3 = -18$. D'où $\lambda = \frac{-18}{3} = -6$ puis $\mu = -3 - \lambda = -3 - (-6) = -3 + 6 = 3$.

Finalement l'unique solution cherchée est la fonction définie par :

$$y = -6\,\mathrm{e}^{2x} + 3\,\mathrm{e}^{-x} - 2\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Fin du corrigé.