

**Exercice 1 (  $\simeq$  5 points).**

1. Calcul de  $\ell = \frac{5 - 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{4}}{7 - \frac{1}{3}}$  :

$$\ell = \frac{5 - \frac{2 \times 5}{3 \times 2 \times 2}}{\frac{21 - 1}{3}} = \frac{5 - \frac{5}{6}}{\frac{20}{3}} = \frac{5 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)}{\frac{20}{3}} = \frac{5 \times \frac{5}{6}}{\frac{20}{3}}.$$

Finalement

$$\ell = 5 \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{20} = \frac{5 \times 5 \times 3}{2 \times 3 \times 5 \times 4} = \frac{5}{2 \times 4} = \frac{5}{8}.$$

2. Résolution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $\frac{2x - 4}{3} - \frac{6x - 7}{5} = 1$ .

$$\frac{2x - 4}{3} - \frac{6x - 7}{5} = 1$$

ssi  $2x - 4 - 3 \times \frac{6x - 7}{5} = 3$  en multipliant par 3 des deux côtés ;

ssi  $5(2x - 4) - 3(6x - 7) = 15$  en multipliant par 5 des deux côtés ;

ssi  $10x - 20 - 18x + 21 = 15$  ;

ssi  $21 - 20 - 15 = 18x - 10x$  ;

ssi  $-14 = 8x$  ;

ssi  $x = -\frac{14}{8}$  en divisant par 8 des deux côtés ;

ssi  $x = -\frac{7 \times 2}{4 \times 2} = -\frac{7}{4}$ .

3. Détermination de l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{2 \ln(3 - 2x) + 1}{4e^{-3x} - 5}$ .

L'expression  $f(x)$  est définie si et seulement si  $\begin{cases} 2 \ln(3 - 2x) + 1 \text{ est définie} \\ \text{et} \\ 4e^{-3x} - 5 \text{ est définie et différent de zéro.} \end{cases}$

Tout d'abord, on sait que  $\ln(t)$  est définie ssi  $t > 0$ . On peut donc calculer  $\ln(3 - 2x)$  si et seulement si  $3 - 2x > 0$ , c'est-à-dire ssi  $3 > 2x$ , c'est-à-dire ssi  $\frac{3}{2} > x$ , c'est-à-dire ssi  $x < \frac{3}{2}$ .

Ensuite, on sait que  $e^t$  est définie pour tout réel  $t$ . Donc  $4e^{-3x} - 5$  est définie pour tout réel  $x$ . Il reste donc à voir quand  $4e^{-3x} - 5 = 0$ .

$$\begin{aligned} 4e^{-3x} - 5 = 0 &\text{ ssi } 4e^{-3x} = 5 \text{ en ajoutant } 5 \text{ des deux côtés,} \\ &\text{ssi } e^{-3x} = \frac{5}{4} \text{ en divisant par } 4 \text{ des deux côtés,} \\ &\text{ssi } \ln(e^{-3x}) = \ln\left(\frac{5}{4}\right) \text{ en appliquant la fonction } \ln \text{ des deux côtés,} \\ &\text{ssi } -3x = \ln\left(\frac{5}{4}\right), \text{ car } \ln(e^t) = t \text{ pour tout réel } t, \\ &\text{ssi } x = -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{4}\right) \text{ en divisant par } -3 \text{ des deux côtés.} \end{aligned}$$

Conclusion. L'expression  $f(x)$  est définie ssi  $x < \frac{3}{2}$  et  $x \neq -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{4}\right)$ .

Or  $5 > 4$ , donc  $\frac{5}{4} > 1$ .

La fonction  $\ln$  étant strictement croissante sur  $]0; +\infty[$ , on a  $\ln\left(\frac{5}{4}\right) > \ln 1$  c'est-à-dire  $\ln\left(\frac{5}{4}\right) > 0$ .

On en déduit que  $-\frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{4}\right) < 0$ , et on peut donc affirmer que  $-\frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{4}\right) < \frac{3}{2}$ .

Par conséquent, l'ensemble de définition de  $f$  est :

$$D_f = \left] -\infty; -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{4}\right) \left[ \cup \left] -\frac{1}{3} \ln\left(\frac{5}{4}\right); \frac{3}{2} \left[.$$

**Exercice 2 (  $\simeq 9$  points).** On considère  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 3}{1 - 2x}$$

1. Les expressions  $2x^2 + 2x + 3$  et  $1 - 2x$  étant définies pour tout réel  $x$ , on peut affirmer que l'expression  $f(x)$  est définie ssi le dénominateur  $1 - 2x$  est différent de zéro, c'est-à-dire ssi  $1 \neq 2x$ , c'est-à-dire ssi  $x \neq \frac{1}{2}$ . Autrement dit,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[ \cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

2.  $f(x)$  est de la forme  $\frac{u(x)}{v(x)}$  avec  $u(x) = 2x^2 + 2x + 3$  et  $v(x) = 1 - 2x$ . Comme  $u'(x) = 4x + 2$  et  $v'(x) = -2$ , on en déduit que pour tout  $x$  de  $D_f$  :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{(4x + 2) \times (1 - 2x) - (2x^2 + 2x + 3) \times (-2)}{(1 - 2x)^2}$$

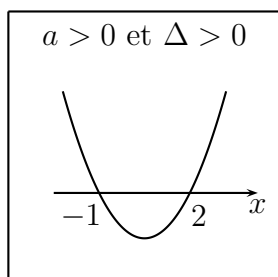
D'où

$$f'(x) = \frac{4x - 8x^2 + 2 - 4x + 4x^2 + 4x + 6}{(1 - 2x)^2} = \frac{-4x^2 + 4x + 8}{(1 - 2x)^2} = \frac{-4(x^2 - x - 2)}{(1 - 2x)^2}.$$

**Remarque.** Il faut évidemment penser à factoriser par 4 ou par  $-4$  l'expression  $-4x^2 + 4x + 8$  pour éviter d'avoir des calculs qui se compliquent inutilement.

3. Signe de la dérivée :  $f'(x)$  étant un quotient, on va étudier son signe en dressant un tableau de signes. Pour cela, on a besoin de :

- $-4$  est toujours  $< 0$ .
- Signe de  $x^2 - x - 2$ ? Après calculs,  $\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$  et les racines sont  $\frac{1 - 3}{2} = -1$  et  $\frac{1 + 3}{2} = 2$ . Ainsi  $a = 1 > 0$  et  $\Delta = 9 > 0$ , ce qui fait que la parabole d'équation  $y = x^2 - x - 2$  est représentée sous cette forme :



- $(1 - 2x)^2$  est toujours positif ou nul car le carré d'un réel est toujours positif ou nul. Autrement dit,  $(1 - 2x)^2 \geq 0$  pour tout réel  $x$ , mais ici on peut préciser que  $(1 - 2x)^2 > 0$  pour tout  $x \in D_f$ .

On en déduit le tableau de signes/variations :

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{1}{2}$	$2$	$+\infty$						
$-4$	$-$	$-$		$-$	$-$						
$x^2 - x - 2$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$					
$(1 - 2x)^2$	$+$		$+$	$0$	$+$	$+$					
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$		$+$	$0$	$-$				
$f$	$+\infty$	$\searrow$	$1$	$\nearrow$	$+\infty$	$  $	$-\infty$	$\nearrow$	$-5$	$\searrow$	$-\infty$

Détails des valeurs au bout des flèches sur la dernière ligne du tableau ci-dessus :

► On a  $f(-1) = \frac{2 - 2 + 3}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1$  et  $f(2) = \frac{8 + 4 + 3}{1 - 4} = \frac{15}{-3} = -5$ .

► Explications des limites en  $\pm\infty$  :

Pour contourner la forme indéterminée «  $\frac{\infty}{\infty}$  », on modifie l'écriture de  $f(x)$  en factorisant par chaque terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur. Ainsi, pour tout réel  $x$  différent de  $\frac{1}{2}$  et de  $0$ , on a :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 3}{1 - 2x} = \frac{x^2(2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})}{x(\frac{1}{x} - 2)} = \frac{x(2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2})}{\frac{1}{x} - 2}.$$

**Remarque.** Il est essentiel ci-dessus de simplifier l'expression  $\frac{x^2}{x}$  pour ne pas retomber sur une nouvelle forme indéterminée.

Comme  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ , on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = 2 + 0 + 0 = 2$ . Ainsi, au numérateur, on obtient par produit  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = -\infty$ .

De même, au dénominateur, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} - 2\right) = 0 - 2 = -2$ .

D'où, par quotient,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

En suivant exactement le même raisonnement, on obtient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

► Explications des limites en  $\frac{1}{2}$  :

Commençons par la limite quand  $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-$ , c'est-à-dire lorsque  $x \rightarrow \frac{1}{2}$  avec  $x < \frac{1}{2}$ . Pour cela, on a

$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} (2x^2 + 2x + 3) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$  et  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} (1 - 2x) = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ . Donc, par quotient,  $f(x)$  va tendre vers l'infini... mais il faut faire une règle des signes pour savoir si c'est  $-\infty$  ou  $+\infty$ . Cela nous ramène à voir si  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} (1 - 2x) = 0^+$  ou  $0^-$ .

En fait, lorsque  $x < \frac{1}{2}$ , on a  $2x < 1$  et donc  $0 < 1 - 2x$ , ce qui signifie que  $1 - 2x > 0$ . Par conséquent,  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} (1 - 2x) = 0^+$  et, comme  $\frac{9}{2} > 0$ , on a forcément  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = +\infty$ .

En procédant de façon analogue, on montre que  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} f(x) = -\infty$ .

**Exercice 3 (  $\simeq 6$  points).**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sin^2 x + \sin x = (\sin x)^2 + \sin x$ .

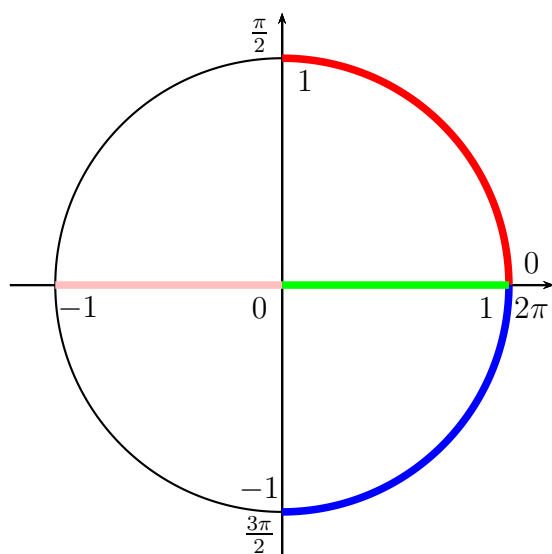
1. On sait que la dérivée de  $u^\alpha$  est  $\alpha u' u^{\alpha-1}$  pour tout réel  $\alpha$ . Donc ici avec  $\alpha = 2$  et  $u(x) = \sin x$ , et donc  $u'(x) = \cos x$ , on obtient pour tout réel  $x$  :

$$f'(x) = 2 \cos x \sin x + \cos x = \cos x (2 \sin x + 1).$$

2. Tableau de variations de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .

L'expression  $f'(x)$  étant un produit, nous allons effectuer un tableau de signes pour déterminer son signe. Pour cela, on a besoin de :

- Signe de  $\cos x$  pour tout  $x \in [0; 2\pi]$  ?



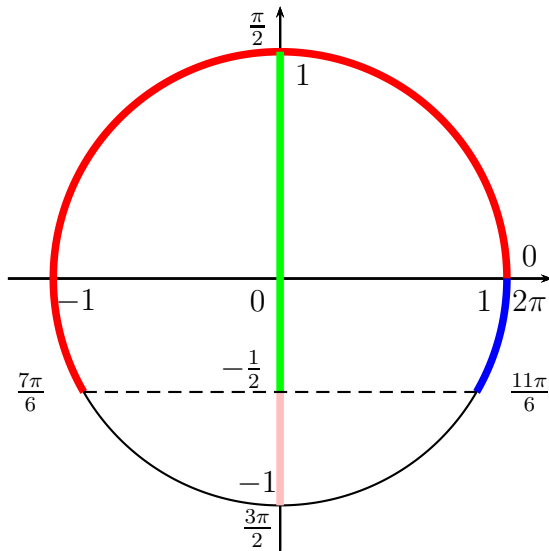
Par lecture du cercle trigo ci-dessus, on constate que sur  $[0; 2\pi]$  on a :

$$\cos x \geq 0 \text{ (zone verte du dessin) ssi } \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} & \text{(zone rouge du cercle)} \\ \text{ou} \\ \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi & \text{(zone bleue du cercle)} \end{cases}$$

- Signe de  $2 \sin x + 1$  pour tout  $x \in [0; 2\pi]$  ?

Remarquons d'abord que, pour tout  $x \in [0; 2\pi]$ , on a :

$$2 \sin x + 1 = 0 \text{ ssi } 2 \sin x = -1, \text{ ssi } \sin(x) = -\frac{1}{2}, \text{ ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}.$$



Par lecture du cercle trigo ci-dessus, on constate que sur  $[0; 2\pi]$  on a :

$$2 \sin x + 1 \geq 0 \quad \text{ssi} \quad 2 \sin x \geq -1$$

$$\text{ssi} \quad \sin x \geq -\frac{1}{2} \quad (\text{zone verte du dessin})$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{7\pi}{6} & (\text{zone rouge du cercle}) \\ \text{ou} \\ \frac{11\pi}{6} \leq x \leq 2\pi & (\text{zone bleue du cercle}) \end{cases}$$

- Nous sommes maintenant en mesure de remplir le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 2\pi]$  :

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\cos x$	+	0	-	0	+	
$2 \sin x + 1$		+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0
$f$	0	$\nearrow$ 2	$\searrow$ $-\frac{1}{4}$	$\nearrow$ 0	$\searrow$ $-\frac{1}{4}$	$\nearrow$ 0

Détails des valeurs au bout des flèches sur la dernière ligne du tableau ci-dessus :

$$f(0) = 0^2 + 0 = 0;$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1^2 + 1 = 2;$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4};$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (-1)^2 + (-1) = 1 - 1 = 0;$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4};$$

$$f(2\pi) = 0^2 + 0 = 0.$$

**Fin du corrigé**