
Attention ! Ci-dessous en noir la correction du devoir, et en bleu mes commentaires pour montrer que les arguments ou raisonnements vus en TD permettaient largement de répondre aux questions du devoir...

- Calcul de $A = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2}{1-2x^3}\,\mathrm{d}x$:

On sait qu'une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

En posant ici $u(x) = 1-2x^3$, on a donc $u'(x) = -6x^2 = -6x^2$ et on peut écrire en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$A = \int_1^2 \frac{-1}{6} \times \frac{-6x^2}{1-2x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{6} \times \int_1^2 \frac{-6x^2}{1-2x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6} \times \Big[\ln\left|1-2x^3\right|\Big]_1^2.$$

Attention ! Il ne faut pas oublier d'écrire les valeurs absolues dans le logarithme.

D'où $A = -\dfrac{1}{6} \times \Big(\ln|1-2\times 8| - \ln|1-2\times 1|\Big) = -\dfrac{1}{6} \times \Big(\ln(15) - \ln(1)\Big) = -\dfrac{\ln(15)}{6}$.

Remarque. Comme $\ln(15) = \ln(3) + \ln(5)$, on peut aussi écrire $A = -\dfrac{\ln(3)+\ln(5)}{6}$.

Commentaire : A du même type que les intégrales I_2 et I_3 de l'exercice 1 du TD pour lesquelles il fallait « bricoler » sur les constantes.

- Calcul de $B = \displaystyle\int_{-2}^0 \frac{3-7\,\mathrm{e}^{-2x}}{3}\,\mathrm{d}x$:

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$$B = \int_{-2}^0 \frac{1}{3} \times \left(3-7\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \int_{-2}^0 \left(3-7\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \left(\int_{-2}^0 3\,\mathrm{d}x - 7 \times \int_{-2}^0 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\right).$$

On sait qu'une primitive de $u'\,\mathrm{e}^u$ est e^u.

En posant ici $u(x) = -2x$, on a donc $u'(x) = -2$ et on peut écrire en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$B = \frac{1}{3} \times \left(\Big[3x\Big]_{-2}^0 - 7 \times \frac{-1}{2} \times \int_{-2}^0 -2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{3} \times \left(0-(-6) + \frac{7}{2} \times \Big[\mathrm{e}^{-2x}\Big]_{-2}^0\right).$$

Donc $B = \dfrac{1}{3} \times \left(6 + \dfrac{7}{2} \times \left(\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^4\right)\right) = \dfrac{1}{3} \times \left(6 + \dfrac{7}{2} \times \left(1-\mathrm{e}^4\right)\right) = \dfrac{1}{3} \times \left(6 + \dfrac{7}{2} - \dfrac{7\,\mathrm{e}^4}{2}\right)$.

D'où $B = \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{19}{2} - \dfrac{7\,\mathrm{e}^4}{2}\right) = \dfrac{19}{6} - \dfrac{7\,\mathrm{e}^4}{6}$.

Commentaire : B du même type que l'intégrale $I_6 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x$ de l'exercice 1 du TD.

- Calcul de $C = \int_1^2 \left(5x^2 - \frac{3}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$:

Commençons par utiliser l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ pour modifier la fonction :

$$\left(5x^2 - \frac{3}{x}\right)^2 = \left(5x^2\right)^2 - 2 \times 5x^2 \times \frac{3}{x} + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 25x^4 - 30x + \frac{9}{x^2}.$$

Ainsi, par linéarité,

$$C = 25 \times \int_1^2 x^4 \,\mathrm{d}x - 30 \times \int_1^2 x \,\mathrm{d}x + 9 \times \int_1^2 \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x.$$

Pour $\alpha \neq -1$, une primitive de $u'u^\alpha$ est $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. En prenant $\alpha = 4$ (puis $\alpha = 1$) et $u(x) = x$, on a $u'(x) = 1$ et une primitive de x^4, respectivement x, est donc $\frac{x^5}{5}$, respectivement $\frac{x^2}{2}$.

Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $\frac{-1}{u}$. En prenant $u(x) = x$, on a $u'(x) = 1$ et une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est donc $\frac{-1}{x}$.

On obtient alors :

$$C = 25 \times \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 - 30 \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 9 \times \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = 5 \times \left[x^5\right]_1^2 - 15 \times \left[x^2\right]_1^2 - 9 \times \left[\frac{1}{x}\right]_1^2.$$

D'où

$$C = 5 \times \left(32 - 1\right) - 15 \times \left(4 - 1\right) - 9 \times \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 155 - 45 + \frac{9}{2} = 110 + \frac{9}{2} = \frac{229}{2}.$$

Commentaire : C du même type que les intégrales I_3 de l'exercice 2 de TD et V de l'exercice 4 du TD pour lesquelles il fallait développer le carré pour se ramener à des fonctions standards.

- Calcul de $D = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x \,(5 - 9 \sin x) \,\mathrm{d}x$:

En développant la fonction puis en utilisant la linéarité, on obtient :

$$D = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (5 \sin x - 9 \sin^2 x) \,\mathrm{d}x = 5 \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x \,\mathrm{d}x - 9 \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 x \,\mathrm{d}x.$$

Calculons ces deux intégrales séparément :

▶ $D_1 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x \,\mathrm{d}x$. On sait qu'une primitive de $u' \sin u$ est $-\cos u$.

Ici on va prendre $u(x) = x$, et donc $u'(x) = 1$. Ainsi :

$$D_1 = \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Or on a $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc $D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

▶ $D_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^2 x \,\mathrm{d}x$. Commençons par rappeler que :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\Big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\Big).$$

En prenant $a = x$ et $b = x$, on obtient : $\sin^2 x = \sin(x) \times \sin(x) = \dfrac{1}{2}\Big(\cos(0) - \cos(2x)\Big)$.

Comme $\cos(0) = 1$, on obtient $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}\Big(1 - \cos(2x)\Big) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \cos(2x)$.

Attention ! Il ne faut pas écrire $\cos 2x$ mais bien $\cos(2x)$. En effet, $\cos 2x = \cos(2) \times x = x \cos 2$.

Une primitive de $u' \cos u$ est $\sin u$. Ici on va prendre $u(x) = 2x$, et donc $u'(x) = 2$. Par conséquent, en remarquant que

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\cos(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 2\cos(2x),$$

on peut écrire :

$$D_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \times 2\cos(2x)\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} 1\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4} \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} 2\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \Big[x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{1}{4} \times \Big[\sin(2x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}.$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4} \times \left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin(\pi)\right).$$

Or on a $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$. Donc $D_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$.

Conclusion.

$$D = 5D_1 - 9D_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}.$$

Remarque : pour calculer D, on aurait aussi pu dès le début faire une IPP en dérivant $5 - 9\sin x$ et en intégrant $\sin x$. Cela aurait amené à intégrer $\cos^2 x$ ce qui se fait de façon analogue à ce qu'on a fait ci-dessus pour intégrer $\sin^2 x$.

Commentaire : D du même type que l'intégrale V de l'exercice 4 du TD pour laquelle, après développement, il fallait aussi intégrer $\sin x$ et $\sin^2 x$.

- Calcul de $E = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(2x)}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$:

On sait que, pour tout réel x, on a $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$. Donc :

$$\frac{\sin(2x)}{\cos^3 x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos^3 x} = \frac{2\sin x}{\cos^2 x}.$$

Or une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $\dfrac{-1}{u}$. En prenant $u(x) = \cos x$, on a $u'(x) = -\sin x$ et on peut écrire :

$$E = -2 \times \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -2 \times \left[\frac{-1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2 \times \left[\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}.$$

D'où

$$E = 2 \times \left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1}\right) = 2 \times \Big(2 - 1\Big) = 2.$$

Commentaire : E du même type que les intégrales I_3 et I_4 de l'exercice 3 du TD pour lesquelles il fallait utiliser une formule de trigo pour se ramener au tableau des primitives.

- Calcul de $F = \displaystyle\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} x\cos(5x)\,\mathrm{d}x$:

On va appliquer la formule d'IPP :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, on pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \cos(5x)$.

Attention ! Ras-le-bol de voir dans les copies des étudiants qui commencent par donner $u(x)$ et $v(x)$, et qui enchainent en donnant $u'(x)$ et $v'(x)$. Il faut absolument commencer par donner $u(x)$ et $v'(x)$, et c'est ensuite qu'on en déduit $u'(x)$ et $v(x)$.

Comme $u(x) = x$, on obtient $u'(x) = 1$. De plus, $v'(x) = \cos(5x) = \dfrac{1}{5} \times (5\cos(5x))$.

Puisqu'une primitive de $w'\cos(w)$ est $\sin(w)$, on choisit $v(x) = \dfrac{1}{5} \times \sin(5x)$ en ayant pris $w(x) = 5x$.

La formule d'IPP donne alors :

$$F = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} x\cos(5x)\,\mathrm{d}x = \left[x \times \frac{1}{5}\sin(5x)\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} - \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 1 \times \frac{1}{5}\sin(5x)\,\mathrm{d}x.$$

D'où

$$F = \frac{\pi}{5} \times \sin(5\pi) - \frac{2\pi}{15} \times \sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) - \frac{1}{5} \times \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin(5x)\,\mathrm{d}x.$$

Or on a $\sin\left(\dfrac{10\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{6\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

et $\sin(5\pi) = \sin(\pi + 4\pi) = \sin(\pi) = 0$.

Finalement

$$F = \frac{2\pi}{15} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 5\sin(5x)\,\mathrm{d}x.$$

Or une primitive de $w'\sin(w)$ est $-\cos(w)$. En prenant $w(x) = 5x$, on obtient donc :

$$F = \frac{\pi\sqrt{3}}{15} - \frac{1}{25} \times \Big[-\cos(5x)\Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = \frac{\pi\sqrt{3}}{15} + \frac{1}{25} \times \Big[\cos(5x)\Big]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi}.$$

D'où

$$F = \frac{\pi\sqrt{3}}{15} + \frac{1}{25} \times \left(\cos(5\pi) - \cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)\right).$$

Or on a $\cos\left(\dfrac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3} + \dfrac{6\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

et $\cos(5\pi) = \cos(\pi + 4\pi) = \cos(\pi) = -1$.

Conclusion.

$$F = \frac{\pi\sqrt{3}}{15} + \frac{1}{25} \times \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{15} + \frac{1}{25} \times \frac{-1}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{15} - \frac{1}{50}.$$

Commentaire : F du même type que l'intégrale I_2 de l'exercice 6 du TD pour laquelle il fallait intégrer $x\cos x$. Par ailleurs, intégrer $x\cos(3x)$ était laissé en exercice dans le polycopié de cours (voir page 12 exercice 2, avec le corrigé qui était disponible sur une de mes vidéos).

- Calcul de $G = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2-3x}{\sqrt{1+5x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{4}} (2-3x) \times \frac{1}{\sqrt{1+5x}}\,\mathrm{d}x$:

On va appliquer la formule d'IPP :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour cela, on pose $u(x) = 2-3x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+5x}}$.

Comme $u(x) = 2-3x$, on obtient $u'(x) = -3$.

De plus, $v'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+5x}} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{5}{\sqrt{1+5x}}$.

Puisqu'une primitive de $\dfrac{w'}{\sqrt{w}}$ est $2\sqrt{w}$, on choisit $v(x) = \dfrac{1}{5} \times 2\sqrt{1+5x} = \dfrac{2}{5}\sqrt{1+5x}$ en ayant pris $w(x) = 1+5x$ et donc $w'(x) = 5$.

La formule d'IPP donne alors :

$$G = \int_0^{\frac{1}{4}} (2-3x) \times \frac{1}{\sqrt{1+5x}}\,\mathrm{d}x = \left[(2-3x) \times \frac{2}{5}\sqrt{1+5x}\right]_0^{\frac{1}{4}} - \int_0^{\frac{1}{4}} (-3) \times \frac{2}{5}\sqrt{1+5x}\,\mathrm{d}x.$$

$$G = \left(2 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{2}{5}\sqrt{1+\frac{5}{4}} - \frac{4}{5}\sqrt{1} + \frac{6}{5} \times \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+5x}\,\mathrm{d}x.$$

$$G = \frac{5}{4} \times \frac{2}{5}\sqrt{\frac{9}{4}} - \frac{4}{5} + \frac{6}{5} \times \frac{1}{5} \times \int_0^{\frac{1}{4}} 5\sqrt{1+5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} - \frac{4}{5} + \frac{6}{25} \times \int_0^{\frac{1}{4}} 5 \times \left(1+5x\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

Or, pour $\alpha \neq -1$, une primitive de $w'w^{\alpha}$ est $\dfrac{w^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. En prenant $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $w(x) = 1+5x$, on a $w(x) = 5$ et on obtient :

$$G = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{6}{25} \times \left[\frac{\left(1+5x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{6}{25} \times \frac{2}{3} \times \left[\left(1+5x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}}.$$

Or on a $\left(1+5x\right)^{\frac{3}{2}} = \left(1+5x\right)^{1+\frac{1}{2}} = \left(1+5x\right)^{1} \times \left(1+5x\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1+5x\right) \times \sqrt{1+5x}$.

D'où

$$G = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{4}{25} \times \left[\left(1+5x\right) \times \sqrt{1+5x}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{4}{25} \times \left(\left(1+\frac{5}{4}\right) \times \sqrt{1+\frac{5}{4}} - 1\right).$$

$$G = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{4}{25} \times \left(\frac{9}{4} \times \sqrt{\frac{9}{4}} - 1\right) = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{4}{25} \times \left(\frac{9}{4} \times \frac{3}{2} - 1\right) = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{4}{25} \times \left(\frac{27}{8} - \frac{8}{8}\right).$$

$$G = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{4}{25} \times \frac{19}{8} = \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{19}{50} = \frac{3\times 25}{4\times 25} - \frac{4\times 20}{5\times 20} + \frac{19\times 2}{50\times 2} = \frac{75-80+38}{100} = \frac{-5+38}{100}.$$

Finalement

$$G = \frac{33}{100}.$$

Commentaire : G du même type que l'intégrale I de l'exercice 8 du TD pour laquelle il fallait intégrer $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. Il faut bien reconnaitre qu'ici les calculs étaient plus sportifs, mais c'était fait exprès pour la dernière intégrale du devoir.

Fin du corrigé.