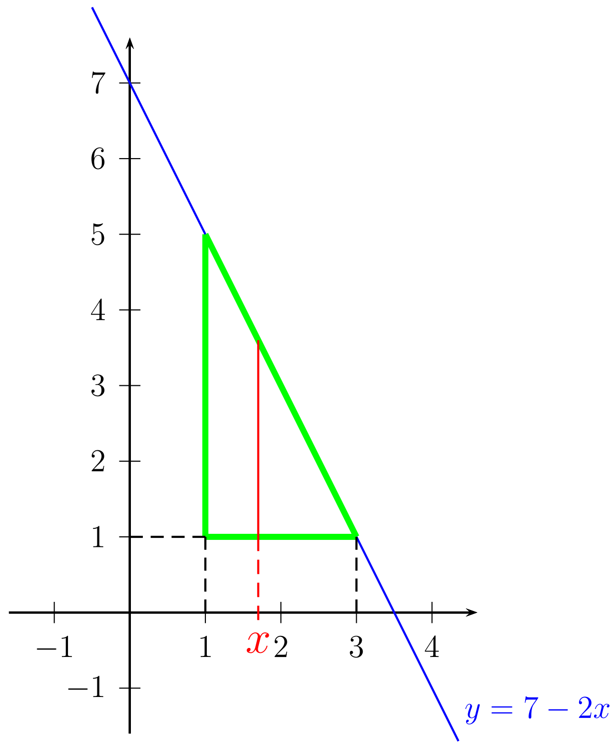
Exercice 1 ($\simeq 3,5$ points). Considérons $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geqslant 1 \ ; \ y \geqslant 1 \ ; \ 2x + y \leqslant 7\Big\}$.

1. La condition $2x + y \leqslant 7$, qui s'écrit aussi $y \leqslant 7 - 2x$, signifie que les points de D sont situés sous la droite d'équation $y = 7 - 2x$. La condition $x \geqslant 1$ signifie que les points de D sont situés à droite de la droite verticale d'équation $x = 1$. La condition $y \geqslant 1$ signifie que les points de D sont situés au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = 1$. Donc D est l'intérieur du triangle vert ci-dessous :



Remarque. Pour déterminer le point d'intersection de la droite horizontale d'équation $y = 1$ et de la droite d'équation $y = 7 - 2x$, il suffit de résoudre $7 - 2x = 1$, ce qui donne $2x = 6$ puis $x = 3$. Ainsi le point de coordonnées $(3, 1)$ est le point d'intersection recherché.

2. On a

$$I = \iint_D \frac{1}{(2x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^3 \left(\int_1^{7-2x} \frac{1}{(2x+y)^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Or une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $\dfrac{-1}{u}$. En prenant ici $u(y) = 2x + y$, on a $u'(y) = 1$ et on peut écrire :

$$I = \int_1^3 \left(\Big[\frac{-1}{2x+y} \Big]_1^{7-2x} \right) \mathrm{d}x = \int_1^3 \left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2x+1} \right) \mathrm{d}x = \int_1^3 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x - \int_1^3 \frac{1}{7}\,\mathrm{d}x.$$

Or une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$. En prenant ici $u(x) = 2x + 1$, on a $u'(x) = 2$ et on obtient :

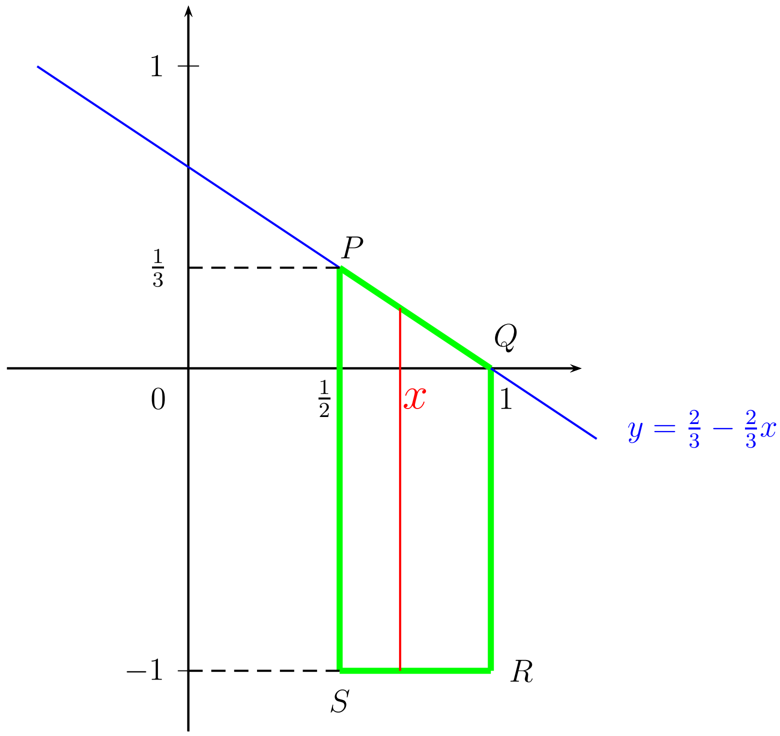
$$I = \frac{1}{2} \times \int_1^3 \frac{2}{2x+1}\,\mathrm{d}x - \Big[\frac{x}{7}\Big]_1^3 = \frac{1}{2} \times \Big[\ln|2x+1|\Big]_1^3 - \frac{2}{7}.$$

D'où

$$I = \frac{1}{2} \times \Big[\ln 7 - \ln 3\Big] - \frac{2}{7} = \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{7}{3}\right) - \frac{2}{7}.$$

Exercice 2 ($\simeq 3,5$ points).

1. D est l'intérieur du quadrilatère vert $PQRS$.



2. Remarquons pour commencer que l'équation de la droite (PQ) est $y = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x$. Pour le voir, il suffit d'écrire qu'une équation de cette droite (non verticale) est de la forme $y = ax + b$, puis de traduire le fait que les coordonnées des points P et Q vérifient cette équation ; cela donne un système à résoudre avec 2 équations et les 2 inconnues a et b.

$$J = \iint_D \cos\Big(\pi(2x+3y)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{-1}^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x} \cos\Big(\pi(2x+3y)\Big)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Or une primitive de $u'\cos u$ est $\sin u$. En prenant ici $u(y) = \pi(2x+3y)$, on a $u'(y) = 3\pi$ et on obtient :

$$J = \frac{1}{3\pi} \times \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\int_{-1}^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x} 3\pi\cos\Big(\pi(2x+3y)\Big)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3\pi} \times \int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\Big[\sin\Big(\pi(2x+3y)\Big)\Big]_{-1}^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x}\right)\mathrm{d}x.$$

Or

$$\Big[\sin\Big(\pi(2x+3y)\Big)\Big]_{-1}^{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x} = \sin(2\pi) - \sin\Big(\pi(2x-3)\Big) = 0 - \sin\Big(\pi(2x-3)\Big) = -\sin\Big(\pi(2x-3)\Big).$$

D'où

$$J = \frac{1}{3\pi} \times \int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(-\sin\Big(\pi(2x-3)\Big)\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3\pi} \times \frac{1}{2\pi} \times \int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(-2\pi\sin\Big(\pi(2x-3)\Big)\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Or une primitive de $u'\sin u$ est $-\cos u$. En prenant ici $u(x) = \pi(2x-3)$, on a $u'(x) = 2\pi$ et on obtient :

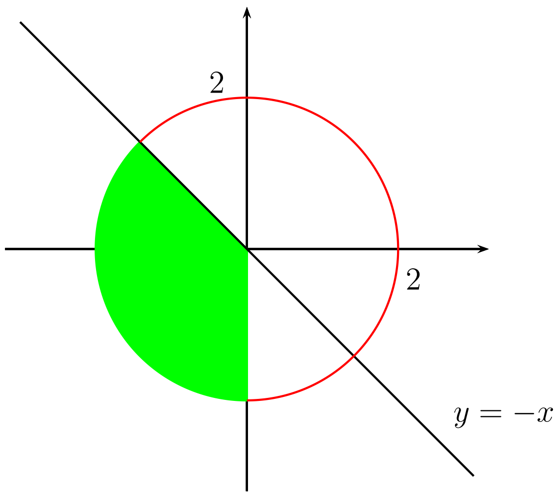
$$J = \frac{1}{3\pi} \times \frac{1}{2\pi} \times \Big[+\cos\Big(\pi(2x-3)\Big)\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{1}{6\pi^2} \times \Big[\cos(-\pi) - \cos(-2\pi)\Big].$$

Finalement

$$J = \frac{1}{6\pi^2} \times \Big[-1-1\Big] = \frac{-2}{6\pi^2} = \frac{-1}{3\pi^2}.$$

Exercice 3 ($\simeq 4,25$ points). Considérons $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leqslant 0 \ ; \ y \leqslant -x \ ; \ x^2+y^2 \leqslant 4\right\}$.

1. La condition $x^2+y^2 \leqslant 4$, que l'on peut écrire $(x-0)^2+(y-0)^2 \leqslant 2^2$, signifie que les points de D sont à l'intérieur du cercle de centre l'origine du repère et de rayon 2. La condition $y \leqslant -x$ signifie que les points de D sont situés en dessous de la droite d'équation $y=-x$. La condition $x \leqslant 0$ signifie que les points de D sont situés à gauche de la droite d'équation $x=0$, c'est-à-dire à gauche de l'axe des ordonnées. Donc D est le domaine vert ci-dessous :



2. En passant aux coordonnées polaires :

$$K = \iint_D \left(1+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta \left(1+(r\sin\theta)^2\right) \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

où

$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant 2;\ \frac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

$$K = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(r + r^3 \times (\sin\theta)^2\right) \mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\theta = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(r + r^3 \times \sin^2\theta\right) \mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\theta.$$

$$K = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} \times \sin^2\theta\right]_0^2\right) \mathrm{d}\theta = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(2 + 4\sin^2\theta\right) \mathrm{d}\theta.$$

Or on sait que $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2\theta$ pour tout réel θ ; donc $2\sin^2\theta = 1-\cos(2\theta)$.

Remarque. Pour transformer $\sin^2\theta$, on aurait aussi pu utiliser la formule de trigo donnant $\sin a \times \sin b$ avec $a=b=\theta$.

Ainsi $2+4\sin^2\theta = 2 + 2\times 2\sin^2\theta = 2 + 2 \times \left(1-\cos(2\theta)\right) = 4 - 2\cos(2\theta)$. D'où

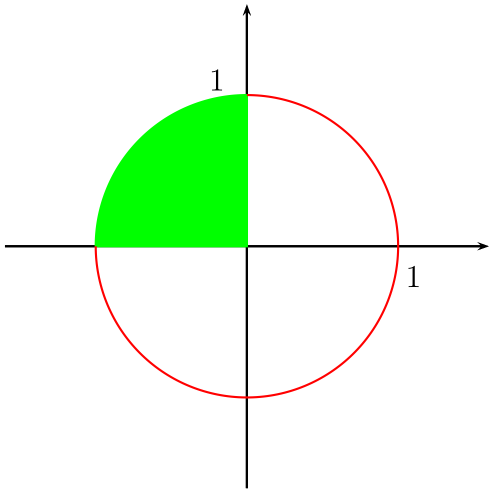
$$K = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(4 - 2\cos(2\theta)\right) \mathrm{d}\theta.$$

Comme une primitive de $u'\cos(u)$ est $\sin u$, on obtient ici en prenant $u(\theta)=2\theta$ (et donc $u'(\theta)=2$) :

$$K = \Big[4\theta - \sin(2\theta)\Big]_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} = 6\pi - \sin(3\pi) - \left(3\pi - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 6\pi - 0 - 3\pi - 1 = 3\pi - 1.$$

Exercice 4 ($\simeq 4,25$ points). Considérons $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \leqslant 0 \ ; \ y \geqslant 0 \ ; \ x^2+y^2 \leqslant 1\Big\}$.

1. La condition $x^2+y^2 \leqslant 1$, qui s'écrit aussi $(x-0)^2+(y-0)^2 \leqslant 1^2$, signifie que les points de D sont situés à l'intérieur du cercle de centre l'origine du repère et de rayon 1. La condition $x \leqslant 0$ signifie que les points de D sont situés à gauche de la droite verticale d'équation $x=0$, c'est-à-dire à gauche de l'axe des ordonnées. Enfin la condition $y \geqslant 0$ signifie que les points de D sont situés au-dessus de la droite horizontale d'équation $y=0$, c'est-à-dire au-dessus de l'axe des abscisses. Donc D est le domaine vert ci-dessous :



2. On va calculer L en passant aux coordonnées polaires. On a alors

$$L = \iint_D y\,\mathrm{e}^x \ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta r\sin\theta\,\mathrm{e}^{r\cos\theta} \times r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

où

$$\Delta = \Big\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant 1; \ \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi\Big\}.$$

Alors

$$L = \int_0^1 \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r\sin\theta\,\mathrm{e}^{r\cos\theta} \times r\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r.$$

Puis par linéarité,

$$L = \int_0^1 r \times \left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r\sin\theta\,\mathrm{e}^{r\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}r.$$

On sait qu'une primitive de $u'\,\mathrm{e}^u$ est e^u. En appliquant cela à $u(\theta) = r\cos\theta$, et donc forcément $u'(\theta) = -r\sin\theta$, on obtient :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r\sin\theta\,\mathrm{e}^{r\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = (-1)\times\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-r\sin\theta)\,\mathrm{e}^{r\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = (-1)\times\Big[\mathrm{e}^{r\cos\theta}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = (-1)\times\Big(\mathrm{e}^{-r}-\mathrm{e}^0\Big) = 1-\mathrm{e}^{-r}\,.$$

D'où

$$L = \int_0^1 r \times \left(1-\mathrm{e}^{-r}\right)\mathrm{d}r = \int_0^1 \left(r - r\,\mathrm{e}^{-r}\right)\mathrm{d}r = \int_0^1 r\,\mathrm{d}r - \int_0^1 r\,\mathrm{e}^{-r}\,\mathrm{d}r.$$

D'une part, $L_1 = \displaystyle\int_0^1 r\,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

D'autre part, calculons l'intégrale $L_2 = \displaystyle\int_0^1 r\,\mathrm{e}^{-r}\,\mathrm{d}r$ en intégrant par parties : posons $u(r) = r$ et $v'(r) = \mathrm{e}^{-r}$. Ainsi $u'(r) = 1$. De plus, on sait qu'une primitive de $w'\,\mathrm{e}^w$ est e^w ; en prenant ici $w(r) = -r$ et donc $w'(r) = -1$, on peut prendre $v(r) = -\,\mathrm{e}^{-r}$.

La formule d'IPP $\displaystyle\int_a^b u(r)v'(r)\,\mathrm{d}r = \Big[u(r)v(r)\Big]_a^b - \int_a^b u'(r)v(r)\,\mathrm{d}r$ donne :

$$L_2 = \int_0^1 r\,\mathrm{e}^{-r}\,\mathrm{d}r = \Big[-r\,\mathrm{e}^{-r}\Big]_0^1 - \int_0^1 1 \times (-\mathrm{e}^{-r})\,\mathrm{d}r.$$

$$L_2 = -\mathrm{e}^{-1} + 0 - \Big[\mathrm{e}^{-r}\Big]_0^1 = -\mathrm{e}^{-1} - \big(\mathrm{e}^{-1} - 1\big) = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1} = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

Conclusion.

$$L = L_1 - L_2 = \frac{1}{2} - \Big(1 - \frac{2}{\mathrm{e}}\Big) = \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}.$$

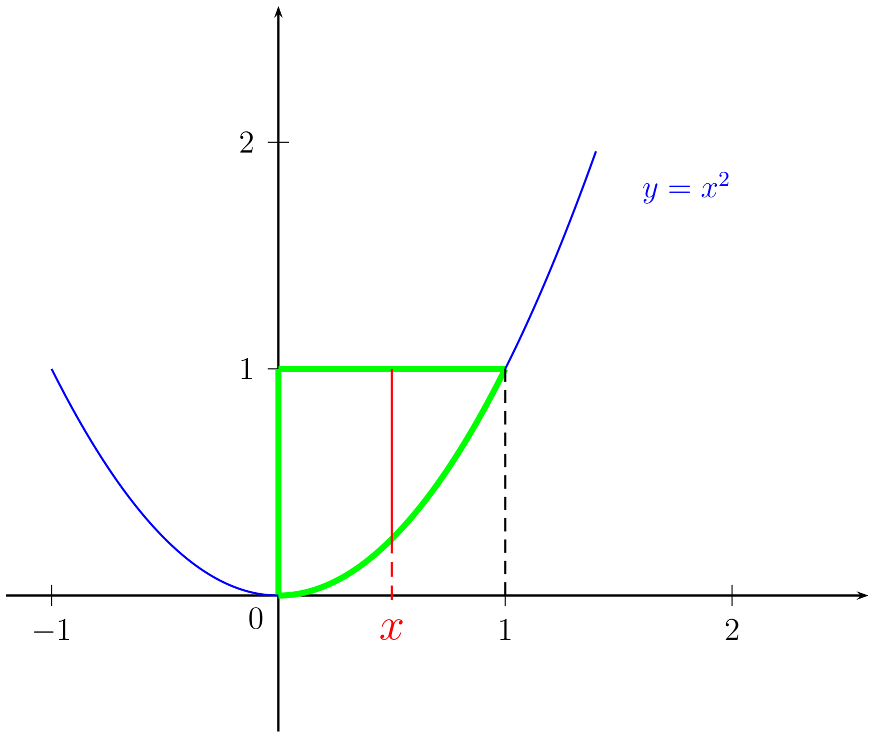
Remarque. On n'était pas obligé de passer en coordonnées polaires ; mais dans ce cas il fallait absolument intégrer en y à l'intérieur et en x à l'extérieur (sinon primitives compliquées en y...) :

$$L = \iint_D y\,\mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{e}^x \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \int_{-1}^0 \Big(1 - x^2\Big)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$$

puis deux IPP successives... A priori c'est un peu plus calculatoire que les polaires mais ça se fait !

Exercice 5 ($\simeq 4,5$ points). Considérons $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x \geqslant 0 \;;\; x^2 \leqslant y \leqslant 1\right\}$.

1. La condition $x^2 \leqslant y$, qui s'écrit aussi $y \geqslant x^2$, signifie que les points de D sont situés au-dessus de la parabole d'équation $y = x^2$. La condition $x \geqslant 0$ signifie que les points de D sont situés à droite de la droite verticale d'équation $x = 0$, donc à droite de l'axe des ordonnées. La condition $y \leqslant 1$ signifie que les points de D sont situés sous la droite horizontale d'équation $y = 1$. Donc D est l'intérieur du domaine vert ci-dessous :



2. On a

$$M = \iint_D \frac{1}{\left(1 + 2y + x^2\right)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{1}{\left(1 + 2y + x^2\right)^2}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Or une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ est $\dfrac{-1}{u}$. En prenant ici $u(y) = 1 + 2y + x^2$, on a $u'(y) = 2$ et on peut écrire :

$$M = \frac{1}{2} \times \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{2}{\left(1 + 2y + x^2\right)^2}\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \int_0^1 \left(\left[\frac{-1}{1 + 2y + x^2} \right]_{x^2}^1 \right) \mathrm{d}x.$$

$$M = \frac{1}{2} \times \int_0^1 \left(-\frac{1}{3 + x^2} + \frac{1}{1 + 3x^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \times \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + 3x^2}\, \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{3 + x^2}\, \mathrm{d}x \right).$$

Sachant qu'une primitive de $\dfrac{u'}{1+u^2}$ est $\arctan(u)$, on va pouvoir calculer les deux intégrales précédentes :

► Calcul de $M_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+(x\sqrt{3})^2}\,\mathrm{d}x$.

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{1+(x\sqrt{3})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \Big[\arctan(x\sqrt{3})\Big]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \Big[\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(0)\Big].$$

D'où

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left[\frac{\pi}{3} - 0\right] = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

► Calcul de $M_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{3+x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$M_2 = \frac{1}{3} \times \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{x^2}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \times \int_0^1 \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Par conséquent,

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \int_0^1 \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left[\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0)\right].$$

D'où

$$M_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \arctan(0)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left[\frac{\pi}{6} - 0\right] = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

► Conclusion.

$$M = \frac{1}{2} \times (M_1 - M_2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right),$$

ce qui donne

$$M = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2 \times 3\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{12\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{36}.$$

FIN DU CORRIGÉ