

- Aucun document autorisé. Calculatrice et téléphone portable interdits
- Toutes les réponses devront être justifiées
- **La rédaction comptera pour une part non négligeable de la note**
- Énoncé à rendre avec la copie Nom : Prénom :

Exercice 1 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 16 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A .
2. Déterminer les valeurs propres de A .
3. Pour chacune des valeurs propres, déterminer avec précision le sous-espace propre associé, c'est-à-dire en donner une interprétation précise en terme de droite, plan...
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer, si cela est possible, une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Que vaut D ? (il n'est pas demandé de vérifier que P est inversible, ni de calculer la matrice inverse de P , ni de faire le calcul explicite de $P^{-1}AP$)

Exercice 2 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de B .
2. Déterminer les valeurs propres de B .
3. Pour chacune des valeurs propres, déterminer avec précision le sous-espace propre associé, c'est-à-dire en donner une interprétation précise en terme de droite, plan...
4. La matrice B est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer, si cela est possible, une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}BP$ soit diagonale. Que vaut D ? (il n'est pas demandé de vérifier que P est inversible, ni de calculer la matrice inverse de P , ni de faire le calcul explicite de $P^{-1}BP$)

Exercice 3 ($\simeq 6,5$ points). Étant donné un réel a , on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a & a \\ -a & 0 & 2 \\ a & -a & a-2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de M .
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice M possède-t-elle exactement deux valeurs propres ?
3. Parmi les valeurs de a trouvées à la question 2, choisir celle qui vérifie $a \leq 0$. La matrice M est-elle diagonalisable dans ce cas ?
4. Parmi les valeurs de a trouvées à la question 2, choisir celle qui vérifie $0 < a < 1$. La matrice M est-elle diagonalisable dans ce cas ?