Exercice 1 ($\simeq 3$ points).

1. Calcul de $\ell = -3 \times \dfrac{1 - \frac{1}{3} \times \frac{5}{4}}{\frac{1}{6} - 6}$.

$$\ell = -3 \times \frac{1 - \frac{5}{12}}{\frac{1}{6} - \frac{36}{6}} = -3 \times \frac{\frac{12}{12} - \frac{5}{12}}{-\frac{35}{6}} = -3 \times \frac{\frac{7}{12}}{-\frac{35}{6}} = -3 \times \frac{7}{12} \times \frac{-6}{35}.$$

Finalement
$$\ell = \frac{-3 \times 7 \times (-6)}{12 \times 35} = \frac{3 \times 7 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{3}{2 \times 5} = \frac{3}{10}.$$

2. Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\dfrac{2x-6}{5} - \dfrac{4x-7}{4} \leqslant 1$.

$\dfrac{2x-6}{5} - \dfrac{4x-7}{4} \leqslant 1$ si et seulement si $4(2x-6) - 5(4x-7) \leqslant 20$ en ayant multiplié par $4 \times 5 > 0$ des deux côtés ;

ssi $8x - 24 - 20x + 35 \leqslant 20$;

ssi $-12x \leqslant 20 + 24 - 35$;

ssi $-12x \leqslant 9$;

ssi $x \geqslant -\dfrac{9}{12}$ en ayant divisé par $-12 < 0$ des deux côtés ;

ssi $x \geqslant -\dfrac{3 \times 3}{3 \times 4}$;

ssi $x \geqslant -\dfrac{3}{4}$.

Autrement dit, l'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[-\dfrac{3}{4} ; +\infty \right[$.

Exercice 2 ($\simeq 8$ points). On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$$

1. Sans difficulté particulière, on obtient pour tout réel x :

$$f'(x) = 4x^3 - 2 \times 3x^2 + 2x - 0 = 4x^3 - 6x^2 + 2x.$$

Puis, en factorisant par $2x$, on obtient :

$$f'(x) = {\color{red}2x} \times 2x^2 - {\color{red}2x} \times 3x + {\color{red}2x} \times 1 = {\color{red}2x} \times \left(2x^2 - 3x + 1\right).$$

2. a) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^4 - 2x^3 + x^2 - 1\right)$.

On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$; donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^3) = +\infty$.
Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$.
Conclusion. Par somme des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^4 - 2x^3 + x^2 - 1\right)$.

Si on procède comme à la question 2.a. on tombe sur la forme indéterminée « $(+\infty) - (+\infty)$ ». Pour contourner ce problème, on va utiliser le résultat suivant : la limite en $+\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Cela donne ici :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x^4 - 2x^3 + x^2 - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty.$$

Remarque 1. On aurait aussi pu factoriser par x^4 l'expression $f(x)$ puis calculer la limite sans rencontrer de forme indéterminée.

Remarque 2. On aurait aussi pu utiliser la technique du terme de plus haut degré pour la limite en $-\infty$.

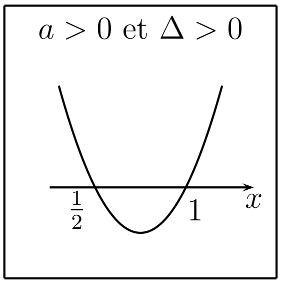
3. On a vu précédemment que $f'(x) = 2x\left(2x^2 - 3x + 1\right)$. Comme cette expression est un produit, on va déterminer le signe de $f'(x)$ en dressant un tableau de signes ; pour cela, on a besoin de :
- 2 est toujours > 0.
- le signe de x dépend de la position de x par rapport à 0.
- Signe de $2x^2 - 3x + 1$?

Calcul du discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$.

Les solutions de l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$ sont :

$$x_1 = \frac{-(-3) - 1}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) + 1}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1.$$

Comme $a = 2 > 0$ et $\Delta = 1 > 0$, la parabole d'équation $y = 2x^2 - 3x + 1$ est représentée sous cette forme :



Par lecture graphique, on peut affirmer que $2x^2 - 3x + 1 \leqslant 0$ ssi $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$.

- Conclusion. Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x^2 - 3x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{15}{16}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Quelques précisions sur les valeurs au bout des flèches. On a :

$f(0) = 0 - 0 + 0 - 1 = -1$;

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} - 2 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{16} + 0 - \frac{16}{16} = -\frac{15}{16}\,;$$

et $f(1) = 1 - 2 + 1 - 1 = -1$.

Exercice 3 ($\simeq 9$ points).

On considère la fonction f définie par :

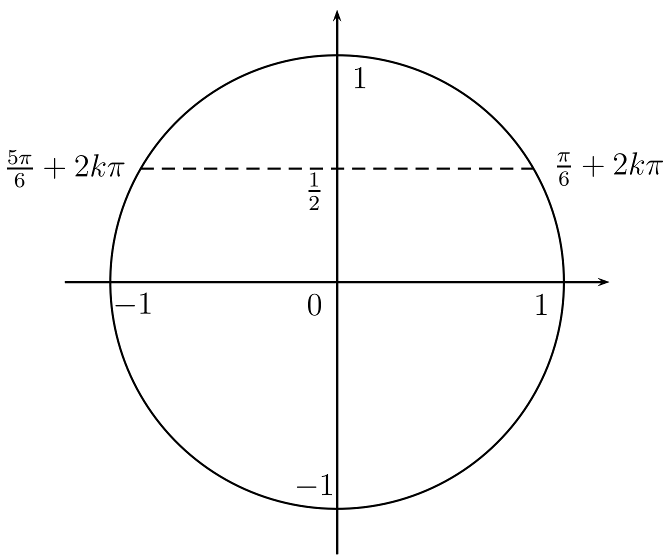
$$f(x) = \frac{1 + 2\cos(2x)}{1 - 2\sin x}.$$

Remarque initiale. Ras-le-bol de voir, dans les copies, des étudiants qui mettent des $S = ...$ à toutes les sauces ; et, en plus, sans jamais dire à quoi correspond S. Par exemple, à la question 1, les solutions de $\sin x = \dfrac{1}{2}$ sont données par un $S = ...$ et, dans la foulée, l'ensemble de définition est $S = ...$, et visiblement ça ne gêne personne de noter S deux ensembles différents ! Idem à la question 2a : les solutions de $\cos t \geqslant -\dfrac{1}{2}$ sont données par un $S = ...$ et, dans la foulée, les solutions de $\cos(2x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ sont données par un $S = ...$

Bordel, il est temps de comprendre ce qu'on fait et de réussir à le présenter clairement, au lieu de balancer bêtement (et sans comprendre) des notations entrevues par le passé sur d'autres exercices.

1. Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$. Donc les expressions $1 + 2\cos(2x)$ et $1 - 2\sin x$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Compte tenu de la division, $f(x)$ est définie si et seulement si $1 - 2\sin x \neq 0$.

   Or $1 - 2\sin x = 0$ ssi $1 = 2\sin x$, ssi $\sin x = \dfrac{1}{2}$.
   En utilisant un cercle trigo

   on obtient : $1 - 2\sin x = 0$ ssi $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   Par conséquent, l'ensemble de définition de f est l'ensemble de tous les réels différents des nombres de la forme $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) et de la forme $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

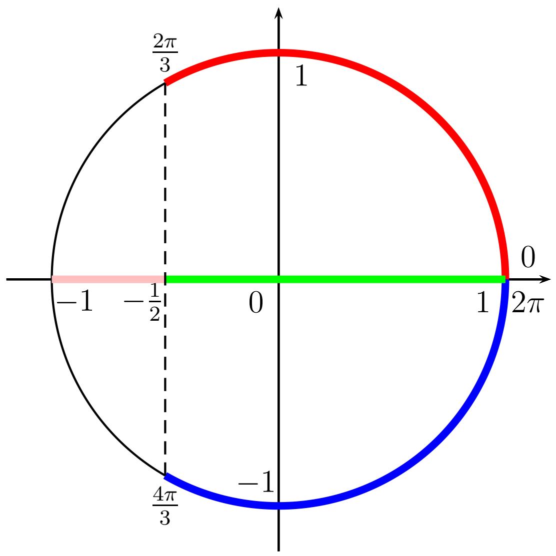
   Remarque. L'ensemble de définition D_f de la fonction f pouvait s'écrire :

   $$D_f = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\} \right).$$

   Aucune obligation de l'écrire comme cela pour obtenir tous les points de cette question. D'ailleurs, si vous ne vous sentez pas capable d'écrire cela, n'essayez même pas de le faire. Contentez-vous de donner l'ensemble de définition de f en écrivant une phrase comme celle écrite ci-dessus avant la remarque.

2. Pour tout $x \in [0;\pi]$, on a : $1+2\cos(2x) \geqslant 0$ ssi $2\cos(2x) \geqslant -1$, ssi $\cos(2x) \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

Posons $t = 2x$. Comme $x \in [0;\pi]$, on a $2x \in [0;2\pi]$ et donc $t \in [0;2\pi]$.
Considérons alors l'inéquation $\cos t \geqslant -\dfrac{1}{2}$ pour tout $t \in [0;2\pi]$ et travaillons avec un cercle trigo.
Remarquons d'abord que, pour tout $t \in [0;2\pi]$, on a $\cos(t) = -\dfrac{1}{2}$ ssi $t = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{4\pi}{3}$ ou $t = \dfrac{2\pi}{3}$.



On constate alors que $\cos(t) \geqslant -\dfrac{1}{2}$ (zone verte) si et seulement si $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{2\pi}{3}$ (zone rouge) ou $\dfrac{4\pi}{3} \leqslant t \leqslant 2\pi$ (zone bleue du dessin).

Si on revient à x (avec $t = 2x$), on obtient :

$$\begin{aligned} 1+2\cos(2x) \geqslant 0 &\text{ ssi } \cos(2x) \geqslant -\frac{1}{2}, \\ &\text{ ssi } 0 \leqslant 2x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leqslant 2x \leqslant 2\pi, \\ &\text{ ssi } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \pi. \end{aligned}$$

Autrement dit, l'ensemble S_1 des solutions sur $[0;\pi]$ de l'inéquation $1+2\cos(2x) \geqslant 0$ est

$$S_1 = \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right].$$

b) Résolution sur $[0;\pi]$ de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.

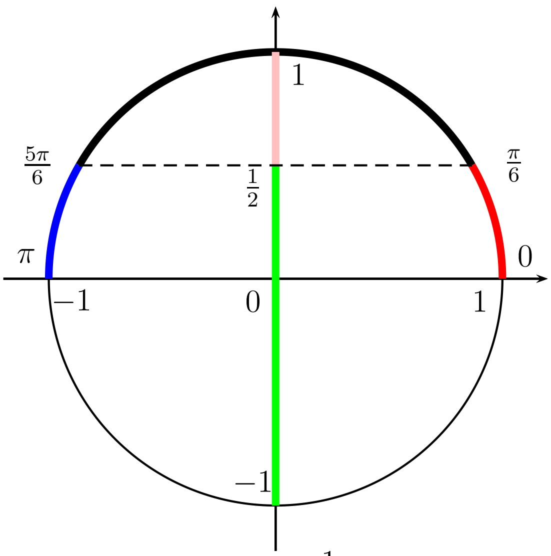
Comme $f(x) = \dfrac{1+2\cos(2x)}{1-2\sin x}$ est un quotient, on va résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ en dressant le tableau de signes de $f(x)$. Pour cela, il nous faut étudier le signe du numérateur et celui du dénominateur.

- Signe de $1+2\cos(2x)$ sur $[0;\pi]$: on vient de le faire à la question précédente.

- Signe de $1-2\sin x$ sur $[0;\pi]$:

$1-2\sin x \geqslant 0$ ssi $1 \geqslant 2\sin x$, ssi $\dfrac{1}{2} \geqslant \sin x$, ssi $\sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Par lecture du cercle trigo et en n'oubliant pas qu'on travaille sur $[0; \pi]$:



on constate alors que $\sin x \leqslant \dfrac{1}{2}$ (zone verte) si et seulement si $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{6}$ (zone rouge) ou $\dfrac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \pi$ (zone bleue).

- En tenant compte de l'ensemble de définition de f et du fait que $\dfrac{\pi}{6} \leqslant \dfrac{\pi}{3} \leqslant \dfrac{2\pi}{3} \leqslant \dfrac{5\pi}{6}$, on peut maintenant dresser le tableau de signes de $f(x)$:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$1+2\cos(2x)$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$1-2\sin x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

- Conclusion. L'ensemble S_2 des solutions sur $[0; \pi]$ de l'inéquation $f(x) \geqslant 0$ est

$$S_2 = \left[0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left]\frac{5\pi}{6}; \pi\right].$$

Fin du corrigé