Exercice 1 ($\simeq 4,5$ points). Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E)\ :\ 2y' - 3y = (9x^2-5)\,\mathrm{e}^{3x}$.

- Après division par 2, l'équa diff (E) s'écrit aussi $y' - \dfrac{3}{2}y = \dfrac{1}{2}(9x^2-5)\,\mathrm{e}^{3x}$ qui est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$, avec $a(x) = -\dfrac{3}{2}$ dont une primitive est donnée par $A(x) = -\dfrac{3}{2}x$.

  Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x}$ avec λ une constante réelle.

- Solution particulière y_P de (E) ?

  Ici $a(x) = -\dfrac{3}{2} = a$ est une constante, ce qui permet d'utiliser le tableau donné dans l'énoncé.

  On a $f(x) = \dfrac{1}{2}(9x^2-5)\,\mathrm{e}^{3x} = P(x)\,\mathrm{e}^{kx}$ avec $k = 3$ et $P(x) = \dfrac{1}{2}(9x^2-5)$. Ainsi $k \neq -a$ et le tableau donné dans l'énoncé affirme qu'on peut chercher y_P sous la forme $Q(x)\,\mathrm{e}^{kx}$ avec Q un polynôme de même degré que P, donc de degré 2. Autrement dit on va écrire $y_P = (bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^{3x}$ avec b, c, d des constantes réelles à déterminer. Il reste à traduire le fait que $y_P = (bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^{3x}$ doit vérifier l'équation différentielle (E) $2y' - 3y = (9x^2-5)\,\mathrm{e}^{3x}$.

  Avant de commencer, calculons y_P' en utilisant la formule $(uv)' = u'v + uv'$:

$$y_P' = (2bx+c)\,\mathrm{e}^{3x} + (bx^2+cx+d) \times (3\,\mathrm{e}^{3x}) = \Big(2bx + c + 3(bx^2+cx+d)\Big)\,\mathrm{e}^{3x}.$$

  Ainsi y_P vérifie (E) si et seulement si $2y_P' - 3y_P = (9x^2-5)\,\mathrm{e}^{3x}$ pour tout réel x

$$\begin{aligned}
&\text{ssi } 2\Big(2bx + c + 3(bx^2+cx+d)\Big)\,\mathrm{e}^{3x} - 3(bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^{3x} = (9x^2-5)\,\mathrm{e}^{3x},\\
&\text{ssi } 2\Big(2bx + c + 3(bx^2+cx+d)\Big) - 3(bx^2+cx+d) = (9x^2-5),\\
&\text{ssi } 4bx + 2c + 6(bx^2+cx+d) - 3(bx^2+cx+d) = 9x^2-5,\\
&\text{ssi } 4bx + 2c + 3(bx^2+cx+d) = 9x^2-5,\\
&\text{ssi } 4bx + 2c + 3bx^2 + 3cx + 3d = 9x^2-5,\\
&\text{ssi } 3bx^2 + (4b+3c)x + (2c+3d) = 9x^2 + 0x - 5,
\end{aligned}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} 3b = 9 & \leftarrow \text{termes en } x^2 \\ 4b + 3c = 0 & \leftarrow \text{termes en } x \\ 2c + 3d = -5 & \leftarrow \text{termes constants} \end{cases}$$

$$\text{ssi } \begin{cases} b = \frac{9}{3} = 3 \\ c = -\frac{4b}{3} = -\frac{4\times 3}{3} = -4 \\ d = \frac{-5-2c}{3} = \frac{-5-2\times(-4)}{3} = \frac{-5+8}{3} = \frac{3}{3} = 1 \end{cases}$$

  D'où $y_P = (bx^2+cx+d)\,\mathrm{e}^{3x} = (3x^2-4x+1)\,\mathrm{e}^{3x}$.

- Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent
  $y = y_H + y_P = \lambda\,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + (3x^2-4x+1)\,\mathrm{e}^{3x}$ avec λ une constante réelle.

Exercice 2 ($\simeq 4,25$ points). Résolution sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ xy' - y = (x-3)(x+1).$$

Après avoir divisé par x (possible car $x \neq 0$ sur $]0;+\infty[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' - \frac{1}{x} \times y = \frac{(x-3)(x+1)}{x}.$$

- Cette dernière équa diff est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$, avec $a(x) = -\dfrac{1}{x}$.

  Or $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ est de la forme $(-1) \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = x$, et donc $u'(x) = 1$.

  Une primitive A sur $]0;+\infty[$ de la fonction a est donc définie par

  $$A(x) = (-1) \times \ln|u(x)| = -\ln|x|.$$

  Or $|x| = x$ puisque x est toujours > 0 pour tout $x \in]0;+\infty[$. Donc $A(x) = -\ln(x)$.

  Par conséquent $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{+\ln(x)} = \lambda x$ avec λ une constante réelle quelconque.

  Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda \times x$ avec λ une constante réelle.

- Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times x$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer. En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

  $$y_P' = \lambda'(x) \times x + \lambda(x) \times 1 = \lambda'(x) \times x + \lambda(x).$$

  Attention ! Ras-le-bol de voir, dans les copies, certains étudiants qui font les fainéants et qui écrivent λ au lieu de $\lambda(x)$ quand ils font la variation de la constante : ici tout l'intérêt de la méthode est de faire varier la constante λ et de la voir comme une fonction ; d'où l'écriture $\lambda(x)$.

  De même, il ne faut pas écrire $\lambda(x)'$ mais bien $\lambda'(x)$. D'habitude, on écrit bien $f'(x)$ et pas $f(x)'$.

  Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

  $$xy_P' - y_P = (x-3)(x+1),$$

  c'est-à-dire

  $$x \times \Big(\lambda'(x) \times x + \lambda(x)\Big) - \lambda(x) \times x = (x-3)(x+1),$$

  c'est-à-dire encore

  $$x^2 \times \lambda'(x) + x \times \lambda(x) - \lambda(x) \times x = (x-3)(x+1),$$

  ce qui donne finalement

  $$x^2 \times \lambda'(x) = (x-3)(x+1),$$

  D'où

  $$\lambda'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{x^2} = \frac{x^2-2x-3}{x^2} = 1 - 2 \times \frac{1}{x} - 3 \times \frac{1}{x^2}.$$

  Ainsi $\lambda(x) = x - 2 \times \ln x - 3 \times \dfrac{-1}{x} = x - 2\ln x + \dfrac{3}{x}$.

  D'où $y_P = \lambda(x) \times x = \left(x - 2\ln x + \dfrac{3}{x}\right) \times x = x^2 - 2x\ln x + 3$.

- Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent
  $y = y_H + y_P = \lambda \times x + x^2 - 2x\ln x + 3$ avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 3 ($\simeq 4,75$ points).

Résolution sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $xy' - 3y = x^4 \sin^3 x$.

Après avoir divisé par x (possible car $x \neq 0$ pour tout $x \in]0;+\infty[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' - \frac{3}{x} \times y = x^3 \sin^3 x.$$

• Cette dernière équa diff est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$, avec $a(x) = \dfrac{-3}{x} = -3 \times \dfrac{1}{x}$ qui est de la forme $-3 \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = x$ (on a bien $u'(x) = 1$). Une primitive A sur $]0;+\infty[$ de la fonction a est donc définie par $A(x) = -3 \times \ln|u(x)| = -3 \times \ln|x|$.

Or $|x| = x$ puisque $x > 0$ pour tout réel $x \in]0;+\infty[$. Donc $A(x) = -3 \times \ln x$.

Par conséquent $y_H = \lambda\, \mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\, \mathrm{e}^{+3\ln x}$ avec λ une constante réelle quelconque.

Or $3\ln x = \ln(x^3)$ pour tout réel $x > 0$, donc $y_H = \lambda\, \mathrm{e}^{\ln(x^3)} = \lambda x^3$.

Solutions de l'équation homogène : $y_H = \lambda \times x^3$ avec λ une constante réelle.

• Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times x^3$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer.

En dérivant y_P comme un produit, on obtient $y_P' = \lambda'(x) \times x^3 + \lambda(x) \times 3x^2$.

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir

$$xy_P' - 3y_P = x^4 \sin^3 x,$$

c'est-à-dire

$$x \times \Big(\lambda'(x) \times x^3 + \lambda(x) \times 3x^2\Big) - 3 \times \Big(\lambda(x) \times x^3\Big) = x^4 \sin^3 x.$$

Autrement dit,

$$x^4\lambda'(x) + \lambda(x) \times 3x^3 - 3 \times \lambda(x) \times x^3 = x^4 \sin^3 x,$$

c'est-à-dire

$$x^4\lambda'(x) = x^4 \sin^3 x,$$

ce qui donne

$$\lambda'(x) = \sin^3 x.$$

Pour trouver une primitive de $\sin^3 x$, on va utiliser le formulaire de trigo pour transformer $\sin^3 x$:

$$\sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x = \sin x \times (1 - \cos^2 x)$$

car $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout réel x. Donc, en développant l'égalité précédente, on obtient :

$$\sin^3 x = \sin x - \sin x \cos^2 x = \sin x + (-\sin x) \times (\cos x)^2.$$

Or $(-\sin x) \times (\cos x)^2$ est de la forme $u'(x) \times (u(x))^\alpha$ avec $\alpha = 2$, $u(x) = \cos x$ et donc $u'(x) = -\sin x$.

On peut donc prendre $\lambda(x) = -\cos x + \dfrac{(\cos x)^3}{3} = -\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3}$.

Remarque 1. On aurait pu intégrer $\sin^3 x$ en utilisant d'autres formules de trigo. Par exemple, en utilisant d'abord $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ puis en transformant $\sin x \times \cos(2x)$ avec la formule $\sin a \times \cos b$, on pouvait aboutir après calculs à :

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin(3x).$$

Ainsi on pouvait prendre $\lambda(x) = -\dfrac{3}{4}\cos x + \dfrac{1}{12}\cos(3x)$.

Remarque 2. Il était aussi possible d'effectuer une IPP sans bornes en écrivant d'abord $\sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x$ puis en faisant le choix de dériver $\sin^2 x$ et d'intégrer $\sin x$. Cela aurait permis d'arriver sur l'intégrale de $\sin x \cos^2 x$ qui pouvait s'intégrer à l'aide de la formule $u'(x) \times (u(x))^\alpha$...

Finalement, si on revient au raisonnement effectué avant les remarques, on obtient :

$$y_P = \lambda(x) \times x^3 = \left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} \right) \times x^3 = \frac{x^3 \cos^3 x}{3} - x^3 \cos x.$$

- Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda \times x^3 + \frac{x^3 \cos^3 x}{3} - x^3 \cos x$$

avec λ une constante réelle quelconque.

- Remarque finale : évidemment la fin de cet exercice (trouver $\lambda(x)$ à partir de $\lambda'(x)$) était la question difficile du devoir.

Exercice 4 ($\simeq 6,5$ points).

Résolution de l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + 5y = 11\cos(3x) - 3\sin(3x)$.

1. Équation homogène (H) : $y'' + 2y' + 5y = 0$.
   L'équation caractéristique associée à (H) est $r^2 + 2r + 5 = 0$.
   Son discriminant est égal à $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$.
   Les solutions de l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 5 = 0$ sont donc :
   $$r_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2 - i\sqrt{16}}{2} = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i$$
   et
   $$r_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2 + i\sqrt{16}}{2} = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i.$$
   Donc $y_H = \big(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\big)\,\mathrm{e}^{-x}$, où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

   Remarque. Pour ceux qui n'ont pas vu les nombres complexes au lycée, il était possible de le rédiger différemment. Après le calcul du discriminant, il suffisait de calculer $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2} = -1$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{16}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$, puis de conclure :
   $$y_H = \big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\big)\,\mathrm{e}^{\alpha x} = \big(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\big)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Solution particulière y_P de (E) sous la forme $y_P = \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$ avec α et β des constantes.

   Alors, en utilisant le fait que $(\cos u)' = -u'\sin u$ et que $(\sin u)' = u'\cos u$, on obtient en prenant $u(x) = 3x$ et donc $u'(x) = 3$:
   $$y_P' = -3\alpha\sin(3x) + 3\beta\cos(3x).$$
   Puis, en dérivant y_P' à nouveau, on obtient
   $$y_P'' = -3\alpha \times 3\cos(3x) + 3\beta \times (-3\sin(3x)) = -9\alpha\cos(3x) - 9\beta\sin(3x).$$
   Par conséquent, y_P vérifie (E)
   si et seulement si $y_P'' + 2y_P' + 5y_P = 11\cos(3x) - 3\sin(3x)$ pour tout réel x,

   ssi $\Big(-9\alpha\cos(3x) - 9\beta\sin(3x)\Big) + 2\Big(-3\alpha\sin(3x) + 3\beta\cos(3x)\Big) + 5\Big(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)\Big)$
   $$= 11\cos(3x) - 3\sin(3x)$$

   ssi $(-9\alpha + 6\beta + 5\alpha)\cos(3x) + (-9\beta - 6\alpha + 5\beta)\sin(3x) = 11\cos(3x) - 3\sin(3x)$,

   ssi $(-4\alpha + 6\beta)\cos(3x) + (-6\alpha - 4\beta)\sin(3x) = 11\cos(3x) - 3\sin(3x)$ pour tout réel x,

   ssi $\begin{cases} -4\alpha + 6\beta = 11 & \leftarrow \text{ termes en } \cos(3x) \\ -6\alpha - 4\beta = -3 & \leftarrow \text{ termes en } \sin(3x) \end{cases}$

   ssi $\begin{cases} -4\alpha + 6\beta = 11 & \text{équation } (E_1) \\ -6\alpha - 4\beta = -3 & \text{équation } (E_2) \end{cases}$

   ssi $\begin{cases} -26\alpha = 13 & \text{équation } (E_1) := 2 \times (E_1) + 3 \times (E_2) \\ -6\alpha - 4\beta = -3 & \text{équation } (E_2) \end{cases}$

$$\text{ssi} \begin{cases} \alpha &= -\dfrac{13}{26} = -\dfrac{13}{13\times 2} = -\dfrac{1}{2} \\ -6\times\dfrac{-1}{2} - 4\beta &= -3 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \begin{cases} \alpha &= -\dfrac{1}{2} \\ \beta &= \dfrac{-3-3}{-4} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

D'où $y_P = -\dfrac{1}{2}\cos(3x) + \dfrac{3}{2}\sin(3x)$.

3. Déterminons l'unique solution de l'équation $y''+2y'+5y = 11\cos(3x)-3\sin(3x)$ vérifiant $y(0) = -2$ et $y'(0) = 12$.
On déduit des questions précédentes que les solutions de (E) sont données par

$$y = y_H + y_P = \big(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\big)\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{3}{2}\sin(3x)$$

où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

On sait que $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$, ainsi que $\mathrm{e}^0 = 1$. On en déduit que :
$y(0) = -2$ ssi $\lambda - \dfrac{1}{2} = -2$, ssi $\lambda = -2 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$.

D'autre part, en dérivant y, on obtient :

$$y' = \big(-2\lambda\sin(2x) + 2\mu\cos(2x)\big)\,\mathrm{e}^{-x} + \big(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\big)(-\mathrm{e}^{-x}) + \frac{3}{2}\sin(3x) + \frac{9}{2}\cos(3x).$$

Par conséquent $y'(0) = 12$ ssi $2\mu - \lambda + 0 + \dfrac{9}{2} = 12$, ssi $2\mu + \dfrac{3}{2} + \dfrac{9}{2} = 12$, ssi $2\mu + 6 = 12$, ssi $\mu = \dfrac{12-6}{2} = 3$.

Finalement l'unique solution cherchée est la fonction définie par :

$$y = \left(-\frac{3}{2}\cos(2x) + 3\sin(2x)\right)\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{3}{2}\sin(3x).$$

Fin du corrigé.