Exercice 1 ($\simeq$ 3 points). Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln 4$.

Remarquons d'abord que $\ln t$ est définie ssi $t>0$. Donc cette équation n'est définie que pour $2x+1>0$ et $x-3>0$, c'est-à-dire pour $x>-\dfrac{1}{2}$ et pour $x>3$, c'est-à-dire pour $x>3$.

Maintenant, en utilisant la formule $\ln(ab)=\ln a+\ln b$, on a pour tout $x>3$:

$$\begin{aligned}
\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln 4 \quad &\text{ssi} \quad \ln\Big((2x+1)(x-3)\Big)=\ln 4 \\
&\text{ssi} \quad \mathrm{e}^{\ln\Big((2x+1)(x-3)\Big)}=\mathrm{e}^{\ln 4} \\
&\text{ssi} \quad (2x+1)(x-3)=4 \\
&\text{ssi} \quad 2x^2-5x-3=4 \\
&\text{ssi} \quad 2x^2-5x-7=0.
\end{aligned}$$

Calculons le discriminant de ce polynôme de degré 2 : $\Delta=(-5)^2-4\times 2\times(-7)=25+56=81=9^2$. Par conséquent, pour tout $x>3$,

$$\begin{aligned}
\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln 4 \quad &\text{ssi} \quad x=\frac{5-9}{2\times 2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{5+9}{2\times 2} \\
&\text{ssi} \quad x=\frac{-4}{4}=-1 \quad \text{ou} \quad x=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

Or $\quad \dfrac{7}{2}=3,5>3 \quad$ et $\quad -1\leqslant 3$.

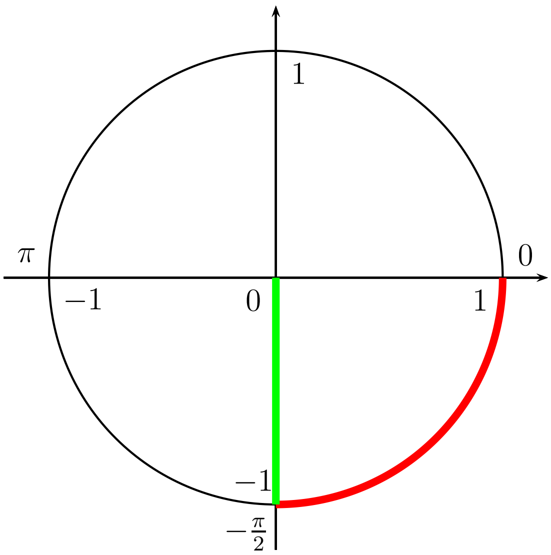
Finalement l'équation $\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln 4$ n'admet qu'une solution : $x=\dfrac{7}{2}$.

Exercice 2 ($\simeq 4$ points). On considère $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ tel que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

- Calcul de $A = \sin\alpha$: on sait que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, c'est-à-dire $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.
  On en déduit que

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}.$$

Par conséquent, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ ou $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.



Par lecture du cercle trigo, comme $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ (zone rouge du dessin ci-dessus), on est sûr que $\sin\alpha$ se lit dans la zone verte et donc $\sin\alpha \leqslant 0$.

Finalement $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

- Calcul de $B = \sin(2\alpha)$: on sait que $\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha$.
  Donc

$$\sin(2\alpha) = 2 \times \frac{3}{5} \times \frac{-4}{5} = -\frac{24}{25}.$$

- Calcul de $C = \cos(2\alpha)$: on sait que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$.
  Donc

$$\cos(2\alpha) = 2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = \frac{18-25}{25} = -\frac{7}{25}.$$

- Calcul de $\sin(3\alpha)$: on sait que $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$.
  Donc

$$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \times \cos(2\alpha) + \sin(2\alpha) \times \cos\alpha$$

puis

$$\sin(3\alpha) = \frac{-4}{5} \times \frac{-7}{25} + \frac{-24}{25} \times \frac{3}{5} = \frac{28}{125} - \frac{72}{125} = -\frac{44}{125}.$$

Exercice 3 ($\simeq 9$ points). On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right) \mathrm{e}^{-x}$$

1. On a $f(x) = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 2x^3 - 4x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

   Tout d'abord $u'(x) = 6x^2 - 8x$. De plus $(\mathrm{e}^w)' = w' \mathrm{e}^w$; en prenant $w(x) = -x$ on obtient ici $w'(x) = -1$ puis $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. D'où :

   $$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = (6x^2 - 8x)\,\mathrm{e}^{-x} + \left(2x^3 - 4x^2\right) \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

   Puis en factorisant par e^{-x} on obtient :

   $$f'(x) = \left[\, \left(6x^2 - 8x\right) - \left(2x^3 - 4x^2\right) \right] \mathrm{e}^{-x} = \left(6x^2 - 8x - 2x^3 + 4x^2\right) \mathrm{e}^{-x} = \left(-2x^3 + 10x^2 - 8x\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

   On peut encore factoriser par $-2x$ dans les parenthèses :

   $$f'(x) = -2x\left(x^2 - 5x + 4\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

2. a) D'une part, en utilisant la règle du terme de plus haut degré pour le polynôme $2x^3 - 4x^2$, on obtient $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(2x^3 - 4x^2\right) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \left(2x^3\right) = -\infty$.

   D'autre part, en posant $t = -x$, on obtient $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \mathrm{e}^{t} = +\infty$.

   Donc par produit, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

   b) On peut écrire :

   $$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right) \mathrm{e}^{-x} = 2x^3\,\mathrm{e}^{-x} - 4x^2\,\mathrm{e}^{-x}.$$

   Par croissances comparées (voir formulaire), on a $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   D'où, par produits et somme des limites, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 2 \times 0 - 4 \times 0 = 0$.

   Remarque. Autre façon de procéder. On aurait aussi pu écrire pour tout $x \neq 0$:

   $$f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right) \mathrm{e}^{-x} = \left(2 - \frac{4}{x}\right) x^3\,\mathrm{e}^{-x}.$$

   Or $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(2 - \dfrac{4}{x}\right) = 2 - 0 = 2$ et, par croissances comparées, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^3\,\mathrm{e}^{-x} = 0$.
   Alors, par produit, on obtient $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 2 \times 0 = 0$.

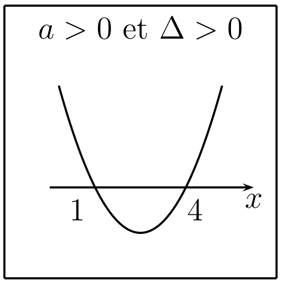
3. On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$f'(x) = -2x\left(x^2 - 5x + 4\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

   Comme la dérivée s'écrit sous la forme d'un produit, on va faire un tableau de signes. Pour cela, il nous faut :
   - le signe de -2 : aucun problème car $-2 < 0$;
   - le signe de x : cela dépend de la position de x par rapport à 0 ;
   - le signe de e^{-x} : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$ (propriété de l'exponentielle : $\mathrm{e}^t > 0$ pour tout réel t) ;
   - le signe de $x^2 - 5x + 4$: pour commencer, on calcule $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$. Le polynôme $x^2 - 5x + 4$ admet donc deux racines réelles :

   $$x_1 = \frac{5 - 3}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{5 + 3}{2 \times 1} = 4.$$

Comme $a = 1 > 0$ et $\Delta = 9 > 0$, la parabole d'équation $y = x^2 - 5x + 4$ est représentée sous cette forme :



Par lecture graphique, on peut affirmer que $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$ ssi $1 \leqslant x \leqslant 4$.

On peut donc dresser le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
-2		$-$		$-$		$-$		$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x^2 - 5x + 4$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$\frac{64}{\mathrm{e}^4}$	$\searrow$	0

Remarque. On a $\quad f(0) = 0 \times \mathrm{e}^0 = 0\,;$

$$f(1) = (2-4)\,\mathrm{e}^{-1} = -\frac{2}{\mathrm{e}}\,;$$

$$f(4) = (2 \times 4^3 - 4 \times 4^2)\,\mathrm{e}^{-4} = \frac{2 \times 4^3 - 4^3}{\mathrm{e}^4} = \frac{4^3}{\mathrm{e}^4} = \frac{64}{\mathrm{e}^4}.$$

4. Pour déterminer les éventuels points d'intersection de la courbe C_f et de l'axe des abscisses, on va résoudre $f(x) = 0$.

   Or, pour tout réel x, on a : $f(x) = \left(2x^3 - 4x^2\right)\mathrm{e}^{-x} = 2x^2\left(x-2\right)\mathrm{e}^{-x}$.
   Comme e^t est toujours > 0 pour tout réel t, on est sûr que e^t est toujours $\neq 0$ pour tout réel t. Ainsi :
   $f(x) = 0$ ssi $2x^2\left(x-2\right) = 0$, ssi $x^2 = 0$ ou $x - 2 = 0$, ssi $x = 0$ ou $x = 2$.

   Par conséquent, les points d'intersection de la courbe C_f et de l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(0, 0)$ et $(2, 0)$.

Exercice 4 ($\simeq 4$ points). On considère sur l'intervalle $[0;\pi]$ la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos(4x) + 4x^2.$$

1. Pour tout $x \in [0;\pi]$, on obtient en utilisant $(\cos u)' = -u' \sin u$ avec $u(x) = 4x$ et donc $u'(x) = 4$:

$$f'(x) = -4\sin(4x) + 8x,$$

puis, en utilisant $(\sin u)' = u' \cos u$, on trouve :

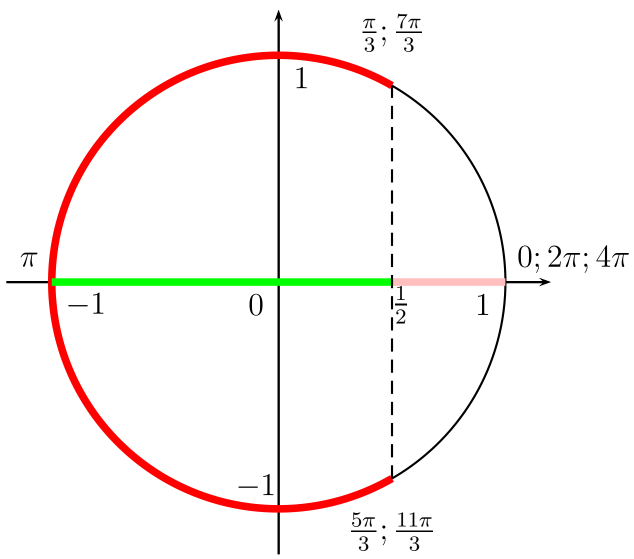
$$f''(x) = -4 \times (4\cos(4x)) + 8 = -16\cos(4x) + 8 = 8\big(1 - 2\cos(4x)\big).$$

2. Pour étudier la convexité de f, on s'intéresse au signe de $f''(x)$. On rappelle que f est convexe là où f'' est positive ou nulle.

$f''(x) \geqslant 0$ ssi $1 - 2\cos(4x) \geqslant 0$, ssi $1 \geqslant 2\cos(4x)$, ssi $\dfrac{1}{2} \geqslant \cos(4x)$, ssi $\cos(4x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Comme $x \in [0;\pi]$, on a $4x \in [0;4\pi]$.
Considérons alors un réel t tel que $t \in [0;4\pi]$ et cherchons d'abord à résoudre $\cos(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Travaillons pour cela avec un cercle trigo. Remarquons d'abord que, pour tout $t \in [0;4\pi]$, on a :

$\cos(t) = \frac{1}{2}$ ssi $t = \frac{\pi}{3}$ ou $t = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$ ou $t = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ ou $t = \frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{11\pi}{3}$.



Par lecture sur le cercle trigo, en parcourant le cercle de $t = 0$ vers progressivement $t = 4\pi$ (cela revient à faire deux tours complets), on constate (voir aussi dessin ci-dessus) que :

$\cos(t) \leqslant \frac{1}{2}$ (zone verte) ssi $\frac{\pi}{3} \leqslant t \leqslant \frac{5\pi}{3}$ (zone rouge, lors du 1er tour)
ou
$\frac{7\pi}{3} \leqslant t \leqslant \frac{11\pi}{3}$ (zone rouge, lors du 2ème tour).

Si on revient à x (en pensant $t = 4x$), on obtient :

$\cos(4x) \leqslant \frac{1}{2}$ ssi $\frac{\pi}{3} \leqslant 4x \leqslant \frac{5\pi}{3}$ ou $\frac{7\pi}{3} \leqslant 4x \leqslant \frac{11\pi}{3}$,

ssi $\frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12}$ ou $\frac{7\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{12}$.

Conclusion. La fonction f est convexe sur $\left[\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{5\pi}{12}\right]$ et sur $\left[\dfrac{7\pi}{12}; \dfrac{11\pi}{12}\right]$.

Fin du corrigé