I.U.T. de Brest
G.M.P. 3.
R6.04 - Mathématiques

Année 2024-25
Corrigé du devoir du 21/03/2025

Exercice 1. On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) & = & t^3 - 3t \\ y(t) & = & t^2 - 4t - 1 \end{cases}$$

1. a) Calcul des dérivées sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) & = & 3t^2 - 3 & = 3(t^2 - 1) \\ y'(t) & = & 2t - 4 & = 2(t - 2) \end{cases}$$

Remarque. On peut factoriser davantage $t^2 - 1$ en utilisant une identité remarquable :

$$t^2 - 1 = t^2 - 1^2 = (t-1)(t+1),$$

ce qui pourrait être particulièrement utile à la question 1.c.

b) On sait que la limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Donc :

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(t^3\right) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} \left(t^2\right) = +\infty.$$

De même, $\lim_{t \to -\infty} x(t) = \lim_{t \to -\infty} \left(t^3\right) = -\infty$ et $\lim_{t \to -\infty} y(t) = \lim_{t \to -\infty} \left(t^2\right) = +\infty.$

Attention ! On ne se contente pas de balancer un résultat de limite en faisant comme si c'était évident : il faut absolument détailler son raisonnement.

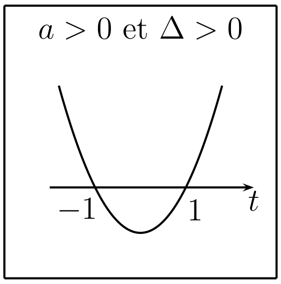
Pour ces calculs de limites, on aurait aussi pu factoriser $x(t) = t^3 - 3t = t(t^2 - 3)$ et $y(t) = t^2 - 4t - 1 = t(t-4) - 1$, puis faire des calculs directs de produits de limites.

c) • Étude du signe de $x'(t) = 3(t^2 - 1)$ sur $\mathbb{R}$. $x'(t)$ est du signe du trinôme du second degré $t^2 - 1$.

Calcul du discriminant : $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 > 0$.

Les solutions de l'équation $t^2 - 1 = 0$ sont -1 et 1.

Comme $a = 1 > 0$ et $\Delta = 4 > 0$, la parabole d'équation $y = t^2 - 1$ est représentée sous cette forme :



Par lecture graphique, on peut affirmer que $x'(t) > 0$ si et seulement si $t^2 - 1 > 0$, ssi $t < -1$ ou $t > 1$.

• Étude du signe de $y'(t) = 2(t-2)$ sur $\mathbb{R}$.
$y'(t) > 0$ si et seulement si $t - 2 > 0$, ssi $t > 2$.

- On en déduit le tableau de variations :

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0		$-$		0		$+$		
x	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	4	$\searrow$	-1	$\searrow$	-4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$						$-$			0	$+$	

Attention ! On ne se contente pas de résoudre $x'(t) = 0$ pour justifier le signe de $x'(t)$. Idem pour $y'(t)$. Beaucoup trop d'étudiants perdent des points sur cette (non-)justification parce qu'ils n'ont toujours pas compris que le raisonnement était tout aussi important que le résultat et parce qu'ils croient naivement que balancer le résultat va rapporter des points...

Détails des calculs pour le tableau de variations :

$$\begin{array}{ll} x(-1) = -1 + 3 = 2; & y(-1) = 1 + 4 - 1 = 4; \\ x(0) = 0 - 0 = 0; & y(0) = 0 - 0 - 1 = -1; \\ x(1) = 1 - 3 = -2; & y(1) = 1 - 4 - 1 = -4; \\ x(2) = 8 - 6 = 2; & y(2) = 4 - 8 - 1 = -5. \end{array}$$

2. ▶ On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(-1) = x'(-1)\vec{\imath} + y'(-1)\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} = -6\vec{\jmath} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(-1)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $\vec{\jmath}$ (car ce sont des vecteurs colinéaires), ce qui veut dire que la tangente est verticale.

Attention (1). Il est essentiel de préciser d'abord que ce vecteur est $\neq \vec{0}$ pour être sûr qu'il dirige la tangente.

Attention (2). Il ne faut surtout pas écrire que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(-1)$ est égal à $\vec{\jmath}$. En effet, les vecteurs $-6\vec{\jmath}$ et $\vec{\jmath}$ ne sont pas égaux, mais ils sont colinéaires ; ils ont donc la même direction.

▶ On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(0) = x'(0)\vec{\imath} + y'(0)\vec{\jmath} = -3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(0)$ est dirigée par ce vecteur.

▶ On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(1) = x'(1)\vec{\imath} + y'(1)\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} = -2\vec{\jmath} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(1)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $\vec{\jmath}$ (car ce sont des vecteurs colinéaires), ce qui veut dire que la tangente est verticale.

▶ On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(2) = x'(2)\vec{\imath} + y'(2)\vec{\jmath} = 9\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = 9\vec{\imath} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(2)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $\vec{\imath}$ (car ce sont des vecteurs colinéaires), ce qui veut dire que la tangente est horizontale.

3. D'après le tableau de variations, nous avons deux branches infinies à étudier : une lorsque t tend vers $+\infty$ et une autre lorsque t tend vers $-\infty$.

▶ Étude de la branche infinie lorsque t tend vers $+\infty$: compte tenu des limites trouvées à la question 1.b, nous devons calculer

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2-4t-1}{t^3-3t}.$$

Or on sait que la limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc :

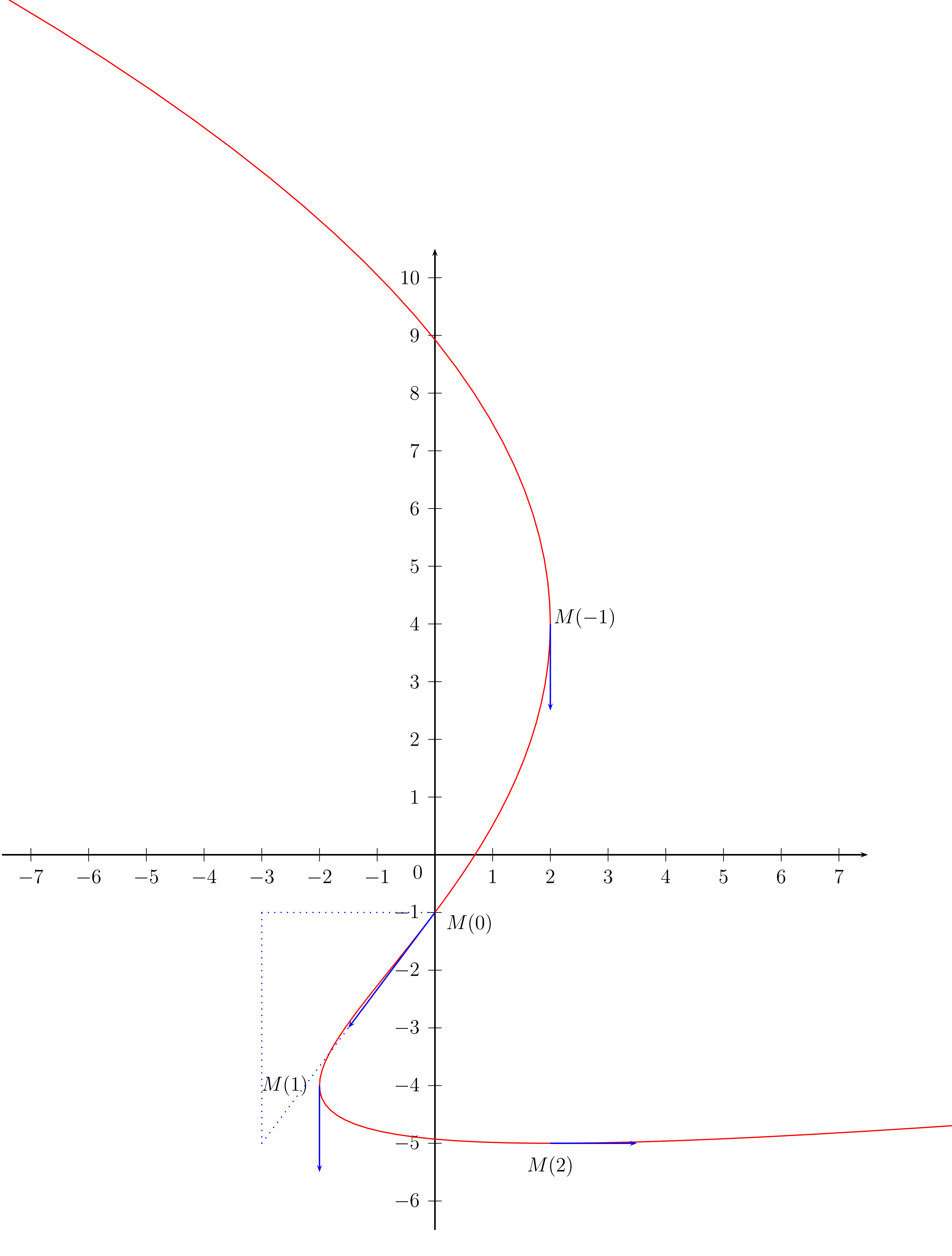
$$\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2}{t^3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

Par conséquent, la courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) lorsque t tend vers $+\infty$.

▶ Étude de la branche infinie lorsque t tend vers $-\infty$: c'est exactement le même raisonnement que pour $t \to +\infty$, avec la même conclusion. La courbe admet une branche parabolique de direction (Ox) lorsque t tend vers $-\infty$.

4. Tracé de la courbe : on commence par placer les points vus aux questions précédentes, ainsi que les vecteurs donnant la direction de leur tangente, puis on respecte le tableau de variations et les branches infinies.

Tout particulièrement, pour tracer la tangente en $M(0)$ qui est dirigée par le vecteur $-3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$, on part du point $M(0)$ de coordonnées $(0; -1)$, on décale de -3 horizontalement puis on descend de 4 verticalement (voir, sur le dessin, traits de construction effectués en pointillés bleus).



10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
M(−1)
M(0)
M(1)
M(2)

Exercice 2. On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) & = & \sin(3t) \\ y(t) & = & 3\cos t - (\cos t)^3 \end{cases}$$

1. a) On sait que cosinus et sinus sont 2π-périodiques, donc $\cos(a + 2\pi) = \cos(a)$ pour tout réel a, et $\sin(a + 2\pi) = \sin(a)$ pour tout réel a. D'où :

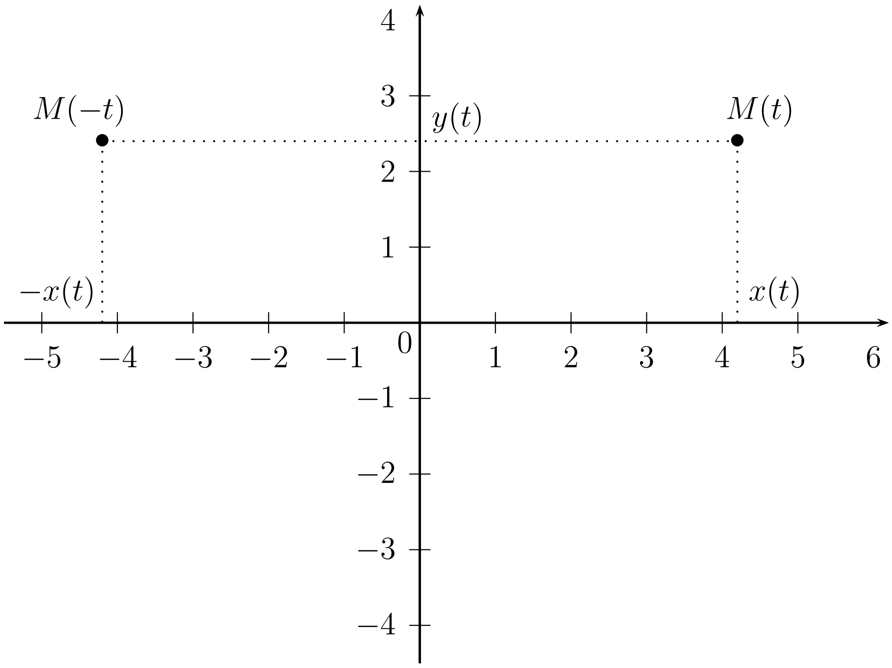
$$\begin{cases} x(t+2\pi) & = & \sin(3(t+2\pi)) = \sin(3t+6\pi) = \sin(3t) = x(t) \\ y(t+2\pi) & = & 3\cos(t+2\pi) - (\cos(t+2\pi))^3 = 3\cos t - (\cos t)^3 = y(t) \end{cases}$$

Conclusion. $M(t + 2\pi) = M(t)$ pour tout réel t.

b) On sait que cosinus est une fonction paire et que sinus est impaire, donc $\cos(-a) = \cos(a)$ pour tout réel a, et $\sin(-a) = -\sin(a)$ pour tout réel a (si besoin, dessiner un cercle trigo pour le voir). D'où :

$$\begin{cases} x(-t) & = & \sin(3 \times (-t)) = \sin(-3t) = -\sin(3t) = -x(t) \\ y(-t) & = & 3\cos(-t) - (\cos(-t))^3 = 3\cos t - (\cos t)^3 = y(t) \end{cases}$$

Autrement dit, en considérant $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$

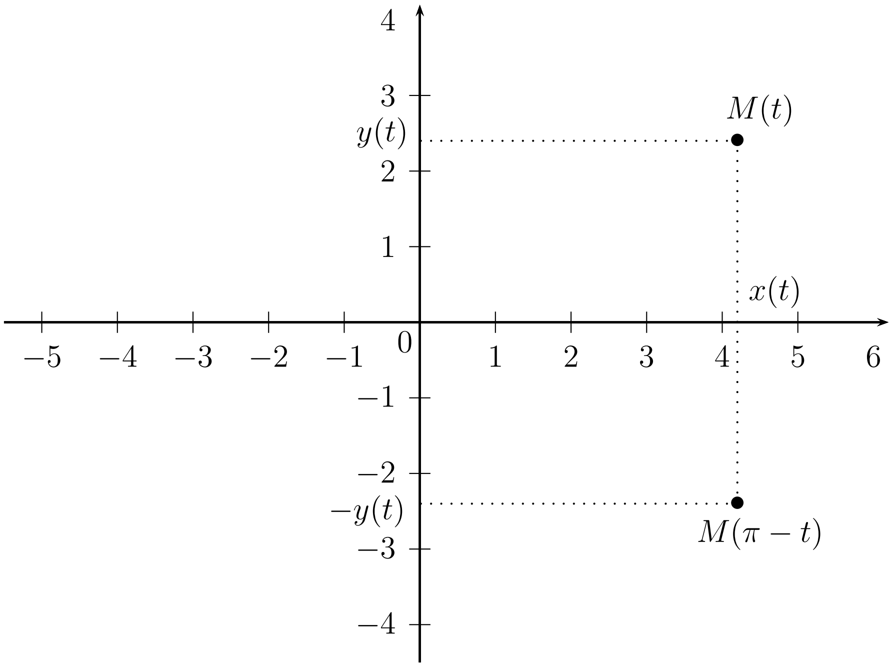


on constate que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées.

c) En plus des propriétés déjà rappelées aux questions précédentes, on sait que $\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ et $\sin(\pi - a) = \sin(a)$ pour tout réel a (si besoin, dessiner un cercle trigo pour le voir). D'où :

$$\begin{cases} x(\pi - t) & = & \sin(3(\pi - t)) = \sin(3\pi - 3t) = \sin(2\pi + \pi - 3t) = \sin(\pi - 3t) = \sin(3t) = x(t) \\ y(\pi - t) & = & 3\cos(\pi - t) - (\cos(\pi - t))^3 = -3\cos t - (-\cos t)^3 = -3\cos t + (\cos t)^3 = -y(t) \end{cases}$$

Autrement dit, en considérant $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$



on constate que $M(\pi - t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des abscisses.

d) Pour réduire l'intervalle d'étude, on va suivre le raisonnement vu dans la vidéo « Courbes paramétrées - Exemple 2 : épisode 1 ».
D'après la question 1.a), on peut réduire l'étude sur un intervalle de longueur 2π, disons $[-\pi; \pi]$.
La question 1.b) permet de réduire encore l'étude à $[0; \pi]$; en effet, lorsque t décrit $[0; \pi]$, alors $-t$ décrit $[-\pi; 0]$, ce qui permet de reconstituer $[-\pi; \pi]$.
Et finalement la question 1.c) permet de réduire à $[0; \frac{\pi}{2}]$; en effet, lorsque t décrit $[0; \frac{\pi}{2}]$, alors $\pi - t$ décrit $[\frac{\pi}{2}; \pi]$, ce qui permet de reconstituer $[0; \pi]$.

2. a) Calcul des dérivées. À l'aide des formules de dérivation $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$ et $(\sin(u))' = u' \cos(u)$ ainsi que $(u^3)' = u'u^2$, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 3\cos(3t) \\ y'(t) & = & -3\sin t - 3 \times (-\sin t) \times (\cos t)^2 \quad = -3\sin t + 3\sin t \times (\cos t)^2 \end{array} \right.$$

On en déduit que

$$y'(t) = -3\sin t + 3\sin t \times (\cos t)^2 = 3\sin t \times \Big(-1 + (\cos t)^2 \Big).$$

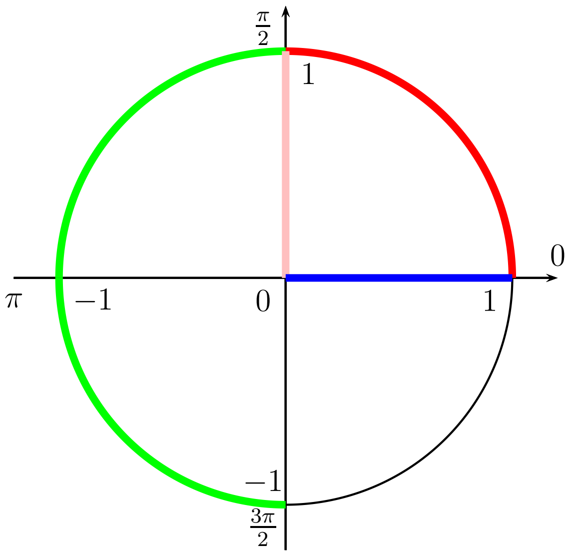
Or $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$ pour tout réel t. Donc $(\cos t)^2 - 1 = -(\sin t)^2$ ce qui permet d'écrire :

$$y'(t) = -3\sin t \times (\sin t)^2 = -3(\sin t)^3.$$

b)

- Étude du signe de $x'(t)$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et donc $0 \leqslant 3t \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$. Par conséquent, en s'appuyant sur le cercle trigo suivant



on en déduit que $3\cos(3t) > 0$ ssi $\cos(3t) > 0$ (zone bleue du dessin), ssi $0 \leqslant 3t < \dfrac{\pi}{2}$ (zone rouge du dessin).
Ainsi $x'(t) > 0$ ssi $3\cos(3t) > 0$, ssi $0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{6}$.

- Étude du signe de $y'(t)$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

En s'appuyant sur le cercle trigo vu précédemment, on constate que, pour tout $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (zone rouge du dessin), on a $\sin t \geqslant 0$ (zone rose du dessin) et donc $(\sin t)^3 \geqslant 0$.
Ainsi $y'(t) = -3(\sin t)^3 < 0$ pour tout réel $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

- Tableau de variations.

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1
y	2	$\searrow$	$\frac{9\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	0
$y'(t)$	0		$-$		

Détails des calculs pour le tableau de variations :

$x(0) = \sin(0) = 0;$ $\qquad y(0) = 3 \times 1 - 1^3 = 3 - 1 = 2;$

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1; \qquad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{(3 \times 4 - 3)\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{8};$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1; \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \times 0 - 0^3 = 0.$$

3. ▶ Tangente au point $M(0)$? On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(0) = x'(0)\vec{\imath} + y'(0)\vec{\jmath} = 3\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} = 3\vec{\imath} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(0)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $\vec{\imath}$ (car ce sont des vecteurs colinéaires), ce qui veut dire que la tangente est horizontale.

▶ Tangente au point $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$? On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{6}\right) = x'\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{\imath} + y'\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} - \frac{3}{8}\vec{\jmath} = -\frac{3}{8}\vec{\jmath} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est dirigée par le vecteur $\vec{\imath}$, ce qui veut dire que la tangente est verticale.

▶ Tangente au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$? On a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\pi}{2}\right) = x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{\imath} + y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est dirigée par le vecteur $\vec{\jmath}$, ce qui veut dire que la tangente est verticale.

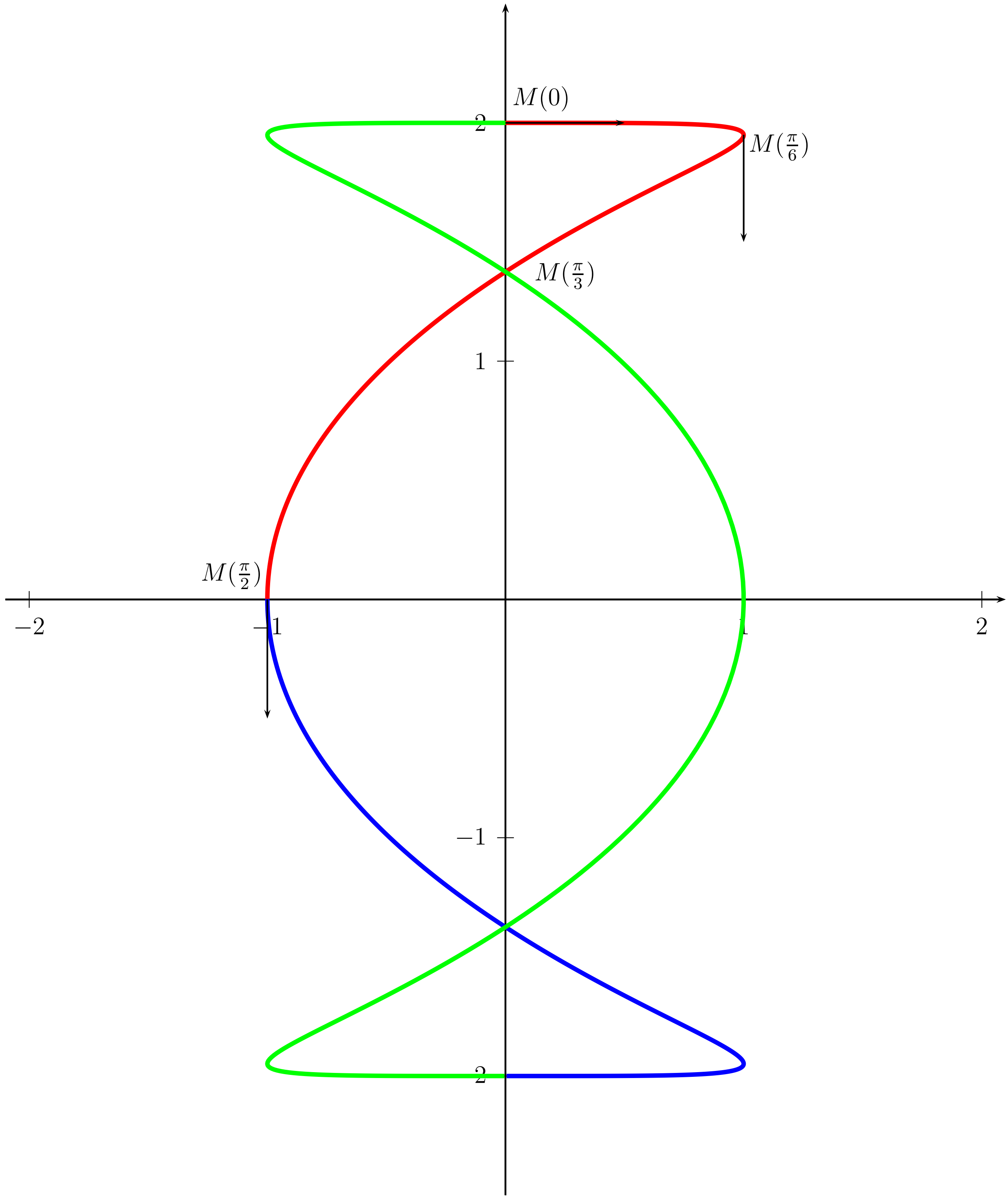
4. Points d'intersection de la courbe avec l'axe (Oy) : il s'agit des points $M(t)$ vérifiant $x(t) = 0$, c'est-à-dire $\sin(3t) = 0$. On se focalise uniquement sur le cas où $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Dans ce cas, $3t \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ et donc, en utilisant le cercle trigo de la question 2, on obtient :

$$\sin(3t) = 0 \text{ ssi } 3t = 0 \text{ ou } 3t = \pi,$$
$$\text{ssi } t = 0 \text{ ou } t = \frac{\pi}{3}.$$

Alors la courbe coupe l'axe des ordonnées aux points $M(0)$ et $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
On a déjà vu que $M(0)$ a pour coordonnées cartésiennes $(2; 0)$.
Et $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ a pour coordonnées cartésiennes $\left(0; \frac{11}{8}\right)$ car on a

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8} = \frac{12}{8} - \frac{1}{8} = \frac{11}{8}.$$

5. Tracé de la courbe : on commence par placer les points vus aux questions précédentes, ainsi que les vecteurs donnant la direction de leur tangente, puis on respecte le tableau de variations. On obtient ainsi la courbe correspondant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Il ne reste plus qu'à effectuer les symétries trouvées à la question 1.



Ici la partie rouge correspond à $M(t)$ avec $t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

La partie bleue correspond à $M(t)$ avec $t \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$; elle a été obtenue par symétrie de la partie rouge par rapport à l'axe des abscisses.
La partie verte correspond à $M(t)$ avec $t \in [-\pi; 0]$; elle a été obtenue par symétrie des parties rouge et bleue par rapport à l'axe des ordonnées.
L'ensemble des parties rouge, bleue et verte correspond à $M(t)$ avec $t \in [-\pi; \pi]$, ce qui correspond bien (d'après la question 1) à toute la courbe $M(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Fin du corrigé.